"Der Ball ist rund"

sagte ***Sepp Herberger*** (1897 - 1977) der Trainer der deutschen Weltmeisterschaftself 1954 in Bern.

Damit hat er nicht ganz Recht. Der seit 1970 verwendete Ball besteht aus

regelmäßigen Fünfecken, von denen jedes von 5 **regelmäßigen Sechsecken** umgeben ist.

Der Fußball ist damit ein **Archimedischer** Körper. Ein Archimedischer Körper ist ein **halbregulärer Polyeder** d.h. seine Begrenzugsflächen sind regelmäßige Vielecke.

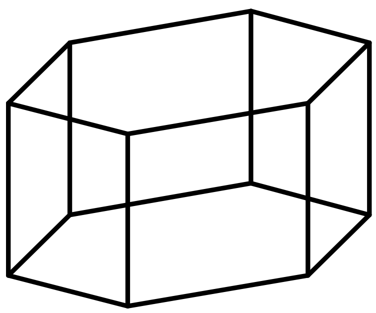
Halbreguläre Polyeder sind demnach

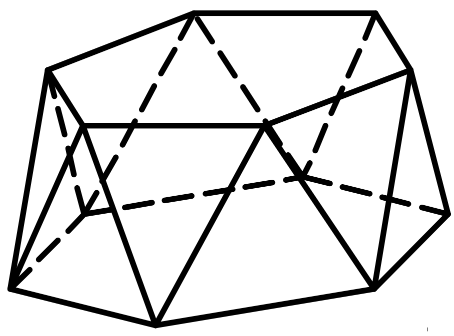
- die 5 **Platonischen Körper**

Tetraeder - Würfel - Oktaeder

Dodekaeder und Ikosaeder

- alle **Prismen** mit zwei kongruenten regelmäßigen Vielecken als Grund- und Deckfläche und mit quadratischen Seitenflächen

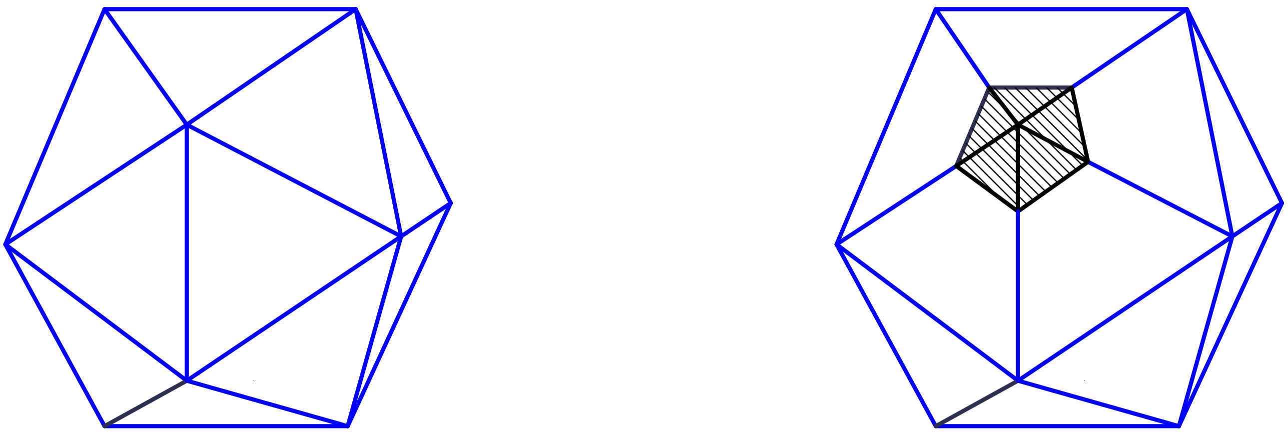




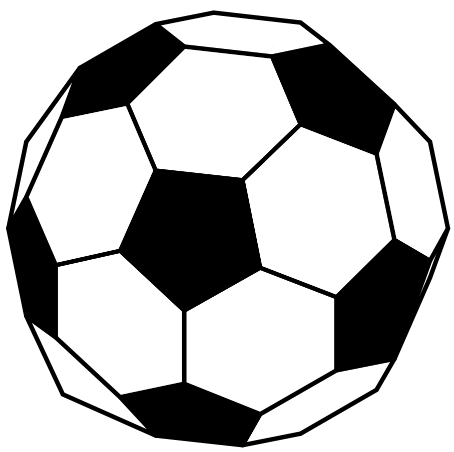
- alle **Antiprismen** mit zwei gegeneinander verdrehten, kongruenten regelmäßigen Vielecken als Grund- und Deckfläche und gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen

Die Archimedischen Körper sind die halbregulären Polyeder, die keiner dieser drei Gruppen angehören.

Viele archimedische Körper erhält man durch Abstumpfen eines Platonischen Körpers.



Den Fußball erhält man man aus einem **Ikosaeder**, indem an jeder Ecke eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche und der Ecke als Spitze abschneidet.



Mathematiker sprechen von einem **abgestumpften Ikosaeder**.

Die Oberfläche des Fußballs besteht daher aus 12 regelmäßigen Fünfecken und 20 regelmäßigen Sechsecken. Er besitzt 90 Kanten und 60 Ecken.

An einer Ecke stoßen 2 Sechsecke und ein Fünfeck zusammen. Die Summe der drei Winkel, die an einer Ecke zusammenstoßen, ist daher

$$2 \cdot 120° + 108° = 348° < 360°$$

Dies bewirkt, dass sich die Seitenflächen beim Aufpumpen nach außen wölben und der Ball Kugelgestalt annimmt.

Erstmals wurde ein derartiger Ball unter der Bezeichnung **Telstar** bei der Weltmeisterschaft 1970 in Mexiko verwendet.

Archimedische Körper

===

Für die Archimedischen Körper gilt wie für alle konvexen Polyeder die Eulersche Formel :

Ist e die Anzahl der Ecken eines Polyeders, k die Zahl seiner Kanten und f die Anzahl seiner Begrenzungsflächen, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{e - k + f = 2}}$$

Besteht nun die Oberfläche eines Archimedischen Körpers aus f_3 regelmäßigen Dreiecken, f_4 regelmäßigen Vierecken usw.,

dann ist die Anzahl f seiner Flächen gegeben durch

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + ...$$

Ist die Anzahl der Dreiecke, Vierecke usw. die in einer Ecke zusammenstoßen gleich m_3, m_4 usw.,

dann gilt

$$e \cdot m_3 = 3 \cdot f_3 \quad \Rightarrow \quad f_3 = e \cdot \frac{m_3}{3},$$

$$e \cdot m_4 = 4 \cdot f_4 \quad \Rightarrow \quad f_4 = e \cdot \frac{m_4}{4}$$

usw.

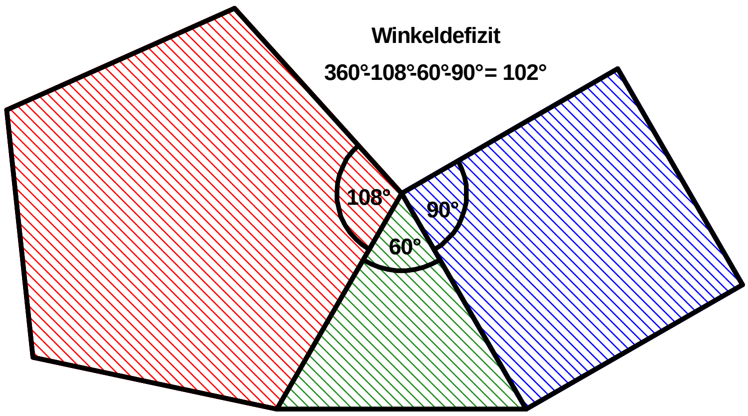
Die Anzahl aller Vieleckswinkel auf der Oberfläche ist daher gegeben durch

$$3 \cdot f_3 + 4 \cdot f_4 + \dots\ =\ e \cdot \left(m_3 + m_4 + \dots \right)\ =\ 2 \cdot k$$

Die Summe der Winkel, die einen Eckpunkt als gemeinsamen Scheitel haben, ist immer kleiner als 360°.

Die Differenz bezeichnet bezeichnet man als **Winkeldefizit**.

Beispiel :



Stoßen an einer Ecke ein regelmäßiges Fünf-, Drei- und Viereck zusammen, dann beträgt das Winkeldefizit 102°.

Allgemein beträgt das Winkeldefizit an einer Ecke

$$360^\circ\ -\ \left[m_3 \cdot \frac{(3-2) \cdot 180^\circ}{3} + m_4 \cdot \frac{(4-2) \cdot 180^\circ}{4} + \dots \right] =$$

$$=\ 360^\circ\ -\ 180^\circ \cdot \left[\left(m_3 + m_4 + \dots \right) - \left(\frac{m_3}{3} + \frac{m_4}{4} + \dots \right) \right]$$

Die Summe der Defizite an allen Ecken ist daher

$$e\cdot 360^\circ - e\cdot 180^\circ\left[\left(m_3+m_4+....\right)-\left(\frac{m_3}{3}+\frac{m_4}{4}+....\right)\right] =$$

$$= e\cdot 360^\circ - 360^\circ\cdot k + 360^\circ\cdot\left(f_3+f_4+....\right) =$$

$$= 360^\circ\cdot(e-k+f) = 360^\circ\cdot 2 = 720^\circ.$$

Für Archimedische Körper ist das Winkeldefizit an jeder Ecke gleich einem konstanten Wert w d.h.

$$\boxed{e\cdot w = 720^\circ}$$

Für den Fußball ist w gegegeben durch

$$w = 360^\circ - 2\cdot 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$$

Daher besitzt der Fußballkörper

$$e = \frac{720^\circ}{12^\circ} = 60$$

Ecken und seine Oberfläche besteht aus

$$f_5 = 60\cdot\frac{1}{5} = 12$$

regelmäßigen Fünf- und

$$f_6 = 60 \cdot \frac{2}{6} = 20$$

regelmäßigen Sechsecken.

Die Anzahl der Kanten ist

$$k = \frac{60 \cdot (1 + 2)}{2} = 90$$