XIV. Der zentrale Grenzwertsatz

===

Definition :

Eine beliebige Zufallsgröße mit dem Erwartunswert μ und der Standardabweichung σ heißt annähernd normal verteilt, wenn für ihre Verteilungsfunktion gilt

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x) \approx \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}$$

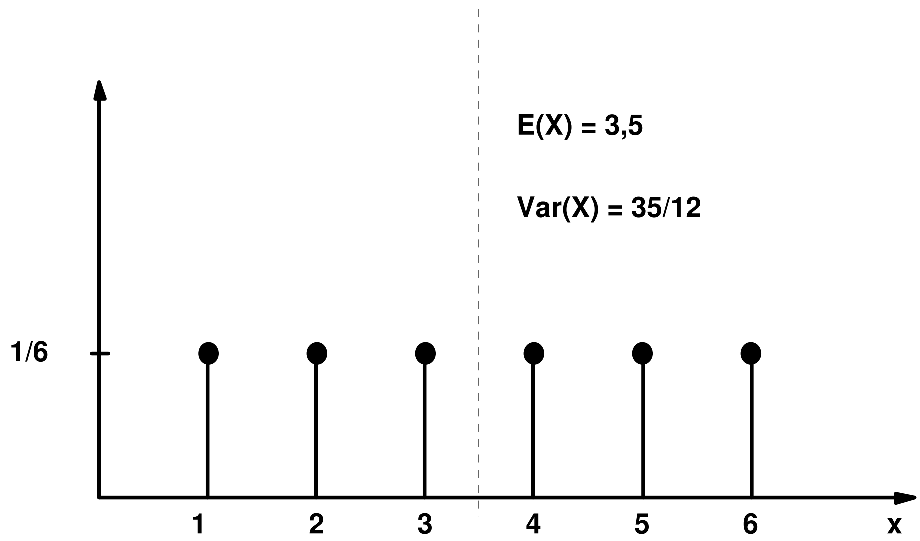
Beispiel :

Experiment : Werfen eines Laplace-Würfels

Zufallsgröße Augenzahl : X

x	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Strichdiagramm :



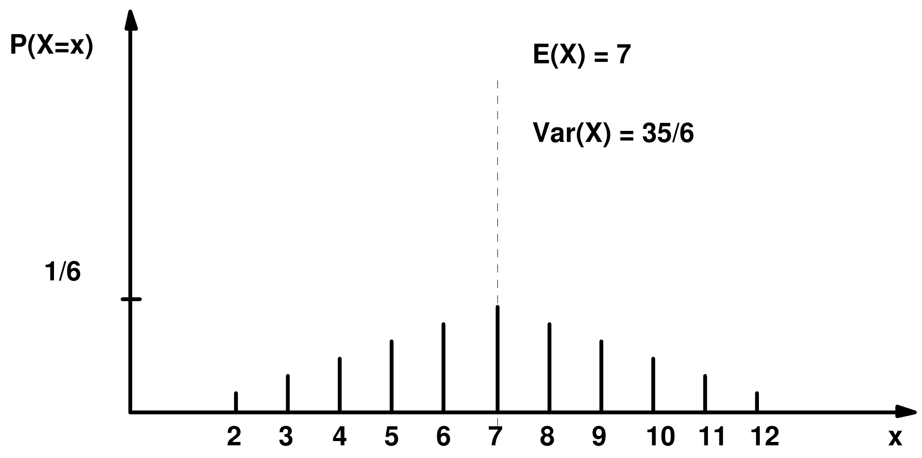
Offensichtlich ist die Zufallsgröße X nicht normalverteilt.

Experiment : Zweimaliges Würfeln

Zufallsgröße Augensumme : $X = X_1 + X_2$ mit X_i : Augenzahl beim i.ten Wurf ($1 \le i \le 2$)

x	2	3	4	5	6	7	8	
Realisierungen	1	2	3	4	5	6	5	
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	usw.

Strichdiagramm :



Erwartungswert : $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 2 \cdot E(X_1) = 2 \cdot 3{,}5 = 7$

Varianz : $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \cdot Var(X_1) = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$

Summenwahrscheinlichkeiten :

$P(3 \le X \le 6) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{14}{36} \approx 38{,}89\%$

Annäherung durch Normaverteilung :

$$P(3 \le X \le 6) = \Phi\left(\frac{3 - 7 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{35}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 7 + 0{,}5}{\sqrt{\frac{35}{6}}}\right) = \Phi(-1{,}86) - \Phi(-0{,}21) \approx 38{,}53\%$$

Die Näherung wird mit wachsendem n immer besser.

Zentraler Grenzwertsatz :

Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ auf dem gleichen Ergebnisraum Ω definierte, identisch verteilte und voneinander **unabhängige Zufallsgrößen**, so ist ihre **Summe** $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ für genügend großes n annähernd **normalverteilt** d.h.

$$\boxed{\mathbf{P(X \le x) \approx \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}} \quad \text{mit } \mu = E(X) = n \cdot E(X_1) \text{ und } \sigma^2 = n \cdot Var(X_1)$$

Bemerkung :

Unter Bedingungen, die fast immer erfüllt sind, gilt der zentrale Grenzwertsatz auch für nicht identisch verteilte Zufallsgrößen.

Beispiel :

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim Werfen von 1000 fairen Würfeln

a) eine Augensumme unter 3485

b) einen Mittelwert von höchstens 3,51

c) genau die Augensumme 3500

Lösung :

S : Augensumme

$E(S) = 1000 \cdot 3{,}5 = 3500$

$Var(S) = 1000 \cdot \frac{35}{12} = \frac{8750}{3}$

a) $P(S < 3485) = P(S \le 3484) = \Phi(\frac{3484 - 3500 + 0{,}5}{\frac{2}{3}\sqrt{42}}) = \Phi(-0{,}29) \approx 1 - \Phi(0{,}29) \approx$

b) $P(S \le 3510) = P(S \le 3510) = \Phi(\frac{3510 - 3500 + 0{,}5}{\frac{25}{3}\sqrt{42}}) = \Phi(0{,}19) \approx$

c) $P(S = 3500) = \Phi(\frac{3500 - 3500 + 0{,}5}{\frac{25}{3}\sqrt{42}}) - \Phi(\frac{3500 - 3500 - 0{,}5}{\frac{25}{3}\sqrt{42}}) = 2 \cdot \Phi(0{,}01) - 1 \approx$

Beispiel :

Wie oft muß man mindestens würfeln, damit der Mittelwert der Augensumme mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit um nicht mehr als 0,01 vom Erwartungswert abweicht ?

Lösung :

Mittelwert	Augensumme
$\mu = 3{,}5$	$\mu = n \cdot 3{,}5$
$\varepsilon = 0{,}01$	$k = 0{,}01 \cdot n$

Bedingung : $P(3{,}5 \cdot n - 0{,}01 \cdot n \le X \le 3{,}5 \cdot n + 0{,}01 \cdot n) > 0{,}9$

$$\Phi\left(\frac{0{,}01 \cdot n}{\sqrt{n \cdot \frac{35}{12}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}01 \cdot n}{\sqrt{n \cdot \frac{35}{12}}}\right) > 0{,}90 \iff 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}01 \cdot n}{\sqrt{n \cdot \frac{35}{12}}}\right) - 1 > 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}01 \cdot n}{\sqrt{n \cdot \frac{35}{12}}}\right) > 0{,}95 \iff 0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{12}{35}} \cdot \sqrt{n} > 1{,}6449 \iff n \ge 79917$$
