

IX. Unabhängigkeit

9

9.1 Definition

	A : Frau	\bar{A} : Mann	
B : Raucher	100	150	250
\bar{B} : Nichtraucher	300	450	750
	400	600	1000

Es gilt :

Wahrscheinlichkeit, dass eine der 1000 befragten Personen eine Frau ist :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{10}$$

Wahrscheinlichkeit, dass eine der befragten Personen raucht : $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$

Wahrscheinlichkeit, dass beides zutrifft : $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$

Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Raucherin ist : $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$ d.h.

$P(B | A) = P(B)$ oder äquivalent dazu $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

In Worten :

Die Wahrscheinlichkeit einer Person ein Raucher zu sein ist unabhängig vom Geschlecht der Person.

Definition :

Zwei Ereignisse A und B aus einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{Multiplikationssatz}$$

Ansonsten heißen sie **stochastisch abhängig**.

Bemerkung : Unterscheide

Unvereinbarkeit	Unabhängigkeit
$A \cap B = \emptyset$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	$P(B A) = P(B) \Leftrightarrow P(A B) = P(A)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Beispiel :

Eine Urne enthält 3 rote und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln

a) mit Zurücklegen

b) ohne Zurücklegen gezogen.

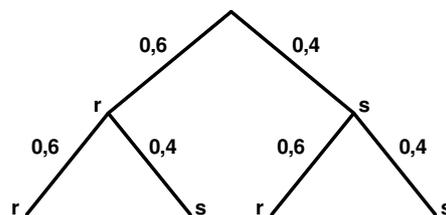
Untersuchen Sie die Ereignisse

A : Die erste gezogene Kugel ist rot

B : Die zweite gezogene Kugel ist rot

auf Unabhängigkeit.

a) Baumdiagramm :

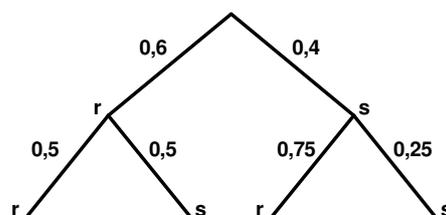


$$P(A) = 0,6$$

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,6$$

$$P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

b) Baumdiagramm :



$$P(A) = 0,6$$

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,75 = 0,6$$

$$P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

9.2 Folgerungen

Satz :

Sind die Ereignisse A und B unabhängig, dann sind auch die Ereignisse

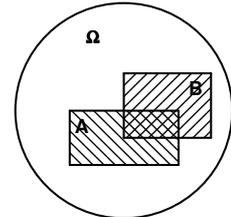
$$A \text{ und } \bar{B}, \bar{A} \text{ und } B, \bar{A} \text{ und } \bar{B}$$

voneinander unabhängig.

Beweis für die Unabhängigkeit von A und \bar{B} :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B})$$



10.3 Unabhängigkeit dreier Ereignisse

Definition :

Drei Ereignisse A, B und C in einem Wahrscheinlichkeitsraum heißen **unabhängig** voneinander genau dann, wenn A, B und C paarweise unabhängig sind, d.h.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

sowie

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Ansonsten heißen sie voneinander abhängig.

Satz :

Sind A, B und C voneinander unabhängig, dann sind je drei der Ereignisse A, B, C, \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} voneinander unabhängig.

9.3 Anwendungen (Baumkombinatorik)

Sind die Teilereignisse eines Stufenexperiments voneinander unabhängig, dann lassen sich kombinatorische Mittel anwenden.

Beispiel :

Ein Laplace-Würfel wird zehnmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse :

- a) A : Es werden genau zwei Sechsen, aber nicht hintereinander, gewürfelt.
- b) B : Es wird eine genau eine Eins und eine Sechs, diese aber nach der Eins, gewürfelt.
- c) C : Die gewürfelten Zahlen bilden eine monoton wachsende Folge

Lösung :

- a) Die Anzahl der zum Ereignis A gehörenden Pfade ist gleich der Anzahl der Möglichkeit zweimal den Faktor $\frac{1}{6}$ und achtmal den Faktor $\frac{5}{6}$ so zu einem Produkt zusammenzufassen, dass die beiden $\frac{1}{6}$ -Faktoren nicht nebeneinander stehen.

$$\text{Also ist } P(A) = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 23,3\%$$

- b) Die Auswahl der Plätze für die Eins und die Sechs muss zusammen erfolgen

$$P(B) = \binom{9}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^8 \approx 3,9\%$$

c) $P(C) = \binom{10+6-1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \approx 0,0050\%$
