VI. Kombinatorik

==

6.1 Einführung

Bei der Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten muss man die Mächtigkeit von Ergebnisräumen und Ereignissen bestimmen.

Betrachtet man die drei verschiedenen Urnenexperimente, dann gibt es drei Grundtypen von Ergebnissen

	Urnenexperiment	Ergebnis
a)	**k- maliges Ziehen nacheinander mit Zurücklegen**	**k-Tupel mit Wiederholung**
b)	**k-maliges Ziehen nacheinander ohne Zurücklegen**	**k-Tupel mit Wiederholung**
b)	**gleichzeitige Entnahme von k Kugeln**	**m-elementige Teilmenge**

Die Stellen eines Tupels (verallgemeinertes Wort) werden mit Elementen (Buchstaben) aus einer odere mehreren Mengen (Alphabet) besetzt.

Die Bildung spezieller Tupel geschieht in zwei Schritten

1. Auswahl von Elementen, aus denen das Tupel bestehen soll;

2. Anordnen dieser Elemente in einer Reihe.

Dem Abzählen zugrunde liegt das bereits in 1.2 erwähnte Zählprinzip, das wir hier etwas anders formulieren

Zählprinzip :

Kann man die 1. Stelle eines k-Tupels mit n_1 verschiedenen Elementen besetzen, die 2. Stelle mit n_2 verschiedenen Elementen usw., dann lassen sich

$$n_1 \cdot n_2 \cdot ..... \cdot n_k$$

verschiedene k-Tupel bilden.

Beispiel :

Auf einer Speisekarte sind 2 Vorspeisen(**N**udelsuppe, **G**emüsesuppe, **P**fannkuchensuppe), 5 Hauptgerichte (**S**chweinebraten, **R**inderbraten, **L**ammbraten, **W**iener Schnitzel, **Q**uarkstrudel) und 3 Nachspeisen (**E**is, **T**iramisu) aufgeführt.

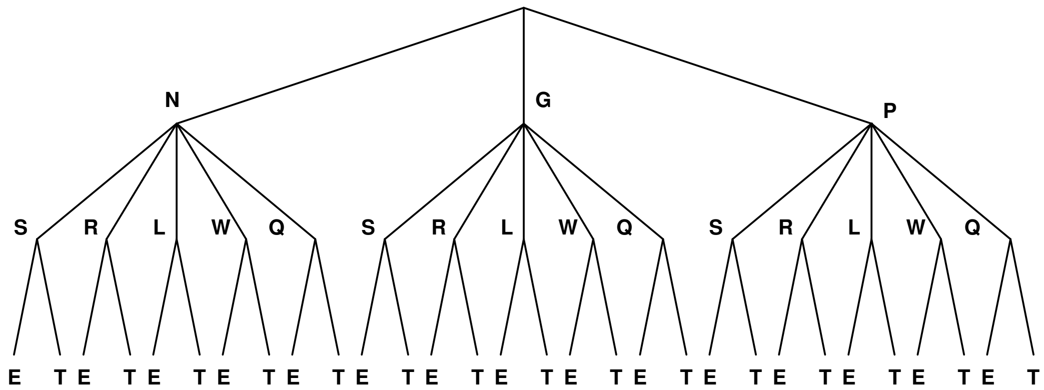
Wie viele verschiedene Menüs lassen sich zusammenstellen ?

Lösung :

Jedes Menü ist durch das Tripel (Vorspeise, Hauptgericht, Nachspeise) festgelegt.

Also lassen sich $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ verschiedene Menüs zusammenstellen.

Baumdiagramm :



6.2 Tupel aus den Elementen einer Menge (Variationen)

----

a) **Tupel mit Wiederholung**

Bei der Bildung eines Tupels werden stets Elemente derselben Menge verwendet. Jedes Element darf wieder verwendet werden.

Aus einer Menge mit n Elementen lassen sich

$$\boxed{\mathbf{V_{mW}(n; k) = n^k}}$$

verschiedene k-Tupel **m**it **W**iederholung bilden.

Begründung :

Für jede Tupelstelle gibt es n verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

Beispiel 1 :

Eine Urne U_6 enthält sechs durchnumerierte Kugeln

Experiment : Dreimaliges Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen

Ergebnisraum :

Alle Tripel gebildet aus den Elementen der sechselementigen Menge $\left\{1, 2\ 3, 4, 5, 6\right\}$ d.h.

$$\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}^3 = \left\{(1 \mid 1 \mid 1), ..., (6 \mid 6 \mid 6)\ \right\}$$

Mächtigkeit des Ergebnisraum : $\left|\Omega\right| = V_{mW}(6\ ;3) = 6^3 = 216$

Beispiel 2 :

Experiment : Fünfmaliges Werfen eines Würfels oder Werfen von fünf Würfeln

Ergebnisraum :

Alle 5-Tupel gebildet aus den Elementen der sechselementigen Menge $\left\{1, 2\ 3, 4, 5, 6\right\}$, d.h.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5 = \{(1|1|1|1|1), ..., (6|6|6|6|6)\}$$

Mächtigkeit des Ergebnisraum : $|\Omega| = V_{mW}(6 ; 5) = 6^5 = 7776$

Beispiel 3 :

Mit den 26 Buchstaben des Alphabets lassen sich 26^4 verschiedene vierbuchstabige, größtenteils unsinnige, Wörter bilden.

b) **Tupel ohne Wiederholung**

Bei der Bildung eines Tupels werden stets Elemente derselben Menge verwendet. Bereits verwendete Elemente dürfen nicht mehr verwendet werden.

Aus den n Elementen einer Menge lassen sich

$$\boxed{\mathbf{V_{oW}(n; k) = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-k+1) \quad (k \le n)}}$$

verschiedene k-Tupel **o**hne **W**iederholung bilden.

Begründung :

Da sich die Elemente nicht wiederholen dürfen, reduziert sich die Zahl der Besetzungsmöglichkeiten pro Tupelstelle um eins.

Beachte :

Die Tupellänge darf die Anzahl der Elemente der Menge nicht überschreiten.

Beispiel 1 :

Experiment : Dreimaliges Ziehen einer Kugel aus der Urne U_6 ohne Zurücklegen

Ergebnisraum :

Alle Tripel ohne Wiederholung gebildet aus Elementen der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mächtigkeit des Ergebnisraum : $|\Omega| = V_{oW}(6 ; 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Beispiel 2 :

Die Wahrscheinlichkeit, beim viermaligen Werfen eines Würfels lauter verschiedene Augenzahlen zu erzielen, errechnet sich zu

1. $\left|\Omega\right| = V_{mW}(6\,;4) = 6^4 = 1296$

2. $\left|E\right| = V_{oW}(6\,;4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

3. $P(E) = \dfrac{\left|E\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{360}{1296} = \dfrac{5}{18}$

Bemerkung :

Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann definiert man

$$\boxed{\mathbf{n\,! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}$$

und nennt dieses Produkt bzw. seinen Wert **Fakultät** von n.

Für 0 und 1 definiert man

$$\boxed{\mathbf{0\,! = 1}} \quad \boxed{\mathbf{1\,! = 1}}$$

Damit lässt sich dann schreiben

$$\boxed{\mathbf{V_{ow}(n;k) = \frac{n\,!}{(n-k)\,!}}}$$

6.3 Anordnungen der Elemente (Permutationen) einer Menge ohne Wiederholung

---

Die Anordnung der Elemente einer Menge in einer Reihe nennt man eine **Permutation** der Elemente dieser Menge (**o**hne **W**iederholung).

Die Anzahl $\mathbf{P_{oW}}$ der verschiedenen Permutationen der Element einer n-elementigen Menge ist gleich

$$\boxed{\mathbf{P_{oW} = V_{oW}(n\,;\,n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!}}$$

Begründung :

Jede derartige Anordnung entspricht einem n-Tupel ohne Wiederholung, gebildet aus den Elementen einer n-elementigen Menge.

Beispiel :

Aus den Buchstaben des Wortes **KARTE** lassen sich durch Umordnen der Buchstaben $4! = 24$ verschiedene Wörter bilden, da jedes Wort eine Permutation der Elemente der Buchstabenmenge $\left\{ \text{A, E, K, R, T} \right\}$ ist.

---

6. 4 Auswahl von Elementen (Kombinationen) aus einer Menge ohne Wiederholung

---

Eine Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge heißt Auswahl **o**hne **W**iederholung, wenn jedes Element höchstens einmal ausgewählt werden kann. Die Reihenfolge bei der Auswahl spielt keine Rolle, d.h. die gewählten Elemente bilden eine k-elementige Teilmenge.

Die Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge ist auf

$$\boxed{\mathbf{K_{oW}(n; k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} := \binom{n}{k}}} \quad \mathbf{n, k \in \mathbb{N}_0, k \le n}$$

Arten möglich. Dies ist gleich der Anzahl derk-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.

Man nennt $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ (sprich "k aus n)" **Binomialkoeffizient**

Begründung :

Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene k-Tupel ohne Wiederholung mit Elementen aus einer n-elementigen Menge.

Je k! dieser Tupel sind aus den gleichen k Elementen aufgebaut. Also gibt es $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.

Beispiel 1 :

Experiment : Gleichzeitiges Ziehen von zwei Kugeln aus der Urne U_6 ohne Zurücklegen

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{ \{1,2\}, \{1,3\}, ..., \{5,6\} \right\}$

Mächtigkeit des Ergebnisraumes : $\left| \Omega \right| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$

Beispiel 2 :

Einer Urne mit 6 roten und 4 grünen Kugeln werden gleichzeitig 5 Kugeln entnommen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 der Kugeln rot sind, ergibt sich aus

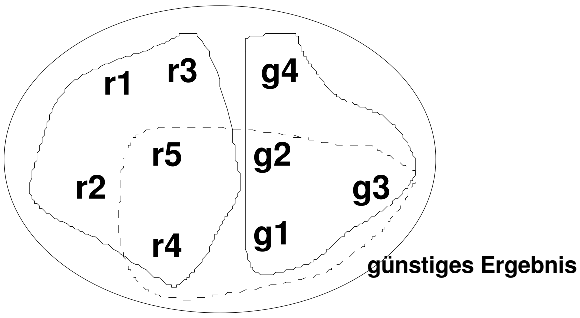
1. $\left|\Omega\right| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$

(Rückführung auf ein Laplace-Experiment durch Unterscheidung der Kugeln)

2. $\left|E\right| = \binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3} = \frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{3!1!} = 60$

(2 Kugeln müssen aus der Menge der roten Kugeln und der Rest aus der Menge der grünen Kugelnstammen)

3. $P(E) = \frac{\left|E\right|}{\left|\Omega\right|} = \frac{60}{252} = \frac{15}{64}$



6.5 Anordnungen der Elemente (Permutationen) einer Menge mit Wiederholung

---

Ein Wort wie **KRATER** ist ebenfalls eine Anordnung der Buchstabenmenge $\left\{ A, E, K, R, T \right\}$ aber mit der Besonderheit, dass der Buchstabe R zweimal auftritt.

> Werden bei einer Anordnung mit den k Elementen einer Menge das 1. Element n_1-mal, das 2. Element n_2-mal usw. verwendet , dann nennt eine derartige Anordnung eine **Permutation mit Wiederholung**.
>
> Ist $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, dann gibt es
>
> $$\boxed{\mathbf{P_{mW}(n; n_1; ....; n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot .... \cdot n_k!}}}$$
>
> derartige Permutationen.

Begründung :

Von den n Plätzen, die zur Verfügung stehen wählt man n_1 Plätze für das erste Element aus. Das ist auf $\binom{n}{n_1}$ Arten möglich. Von den verbleibenden $n - n_1$ Plätzen wählt man n_2 für das zweite Element aus usw.

Also gibt es dann

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot ... = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot .... = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

verschiedene Anordnungen.

Beispiel :

Aus den Buchstaben des Wortes **MISSISSIPPI** lassen sich durch Umordnen der Buchstaben

$\frac{(1+4+4+2)\,!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650$ verschiedene Wörter bilden.

6.6 Auswahl von Elementen (Kombinationen) aus einer Menge mit Wiederholung

----

Bei dieser Auswahl dürfen die Elenmente mehrmals auswählt werden.

Wird aus der n-elementigen Menge k-mal mit Wiederholung gewählt, dann gibt es

$$\mathbf{K_{mW}(n;k) = \frac{\left[(n-1)+k\right]!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}}$$

verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

Begründung :

Man stellt eine Auswahl durch eine Zeichenkette aus k Sternen"*" und $n-1$ Trennstrichen "|" dar.

Die Anzahl der Kreuze links vom ersten Trennstrich gibt an, wie oft das 1. Element der angeordneten Menge ausgewält wird. Die Anzahl der Ktreuz zwischem dem 1. und 2. Trennstrich wie oft das 2. Element ausgewählt wird usw.

Nach 6.5 gibt es $\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!}$ derartige Zeichenketten.

Beispiel 1 :

Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Bananen an 6 Affen zu verteilen ?

Lösung :

Die Verteilung folgt an 6 Affen, daher sind 5 Trennstriche erforderlich.

Es werden 10 Bananen verteilt, d.h. es müssen 10 Sterne gesetzt werden.

Es gibt also $\frac{(6-1+10)!}{(6-1)! \cdot 10!} = 3003$ mögliche Verteilungen.

Beispiel 2 :

Wie viele verschiedene Wurfbilder können beim Werfen von 12 gleich aussehenden Würfeln auftreten ?

Lösung :

Ein Wurfbild ist durch Angabe der Häufigkeit des Auftretens jeder der sechs verschiedenen Augenzahlen festgelegt.

Es gibt also $\frac{(6-1+12)!}{(6-1)!\cdot 12!} = 6188$ verschiedene Wurfbilder.

6.7 Spezielle Themen der Kombinatorik

6.7.1 Anordnungen im Kreis (Runder Tisch)

Beispiel :

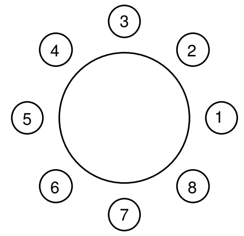
Auf wie viel Arten können 8 Personen an einem runden Tisch Platz nehmen, wenn man

a) unterscheidet, ob eine Person links oder rechts von einer anderen sitzt ?

b) Anordnungen, bei der jede Person die gleichen Sitznachbarn hat, als gleich ansieht ?

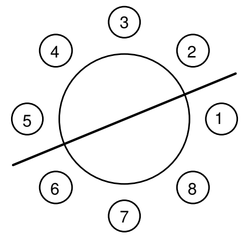
Lösung :

a) Numeriert man alle 8 Plätze, dann können gibt es 8! verschiedene Anordnungen der Personen am Tisch. Je 8 dieser Anordnungen gehen durch Drehung auseinander hervor.



Also können die Personen auf $\frac{8!}{8} = 7!$ verschiedene Arten Platz nehmen.

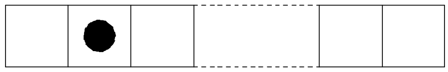
b) Wählt man eine beliebige Symmetrieachse des Tischs, dann gibt es zu jeder Anordnung aus a) eine dazu symmetrische Anordnung, bei der nur die linken und rechten Sitznachbarn jeder Person vertauscht sind.



Also können die Personen auf $\frac{7!}{2}$ verschiedene Arten Platz nehmen.

6.7.2 Zellenbelegungen

Sollen n verschiedene Zellen



mit k Marken belegt werden, dann lassen sich folgende Fälle unterscheiden

a) Die Marken sind unterscheidbar und jede Zelle darf mit beliebig vielen Marken belegt werden. Dann wird jede Belegung durch ein k-Tupel beschrieben, an dessen i.ter Stelle steht, in welche Zelle die Marke Nr. i gelegt wird.

Es gibt also n^k verschiedene Belegungen.

b) Die Marken sind ununterscheidbar. Dann stellt jede Verteilung eine Auswahl von k Elementen aus einer n-elementigen Menge mit Wiederholung dar.

Es gibt also $\frac{(n-1+k)!}{k!\cdot(n-1)!}$ verschiedene Belegungen.

c) Die Marken sind unterscheidbar, aber in jede Zelle darf höchstens eine Marke gelegt werden (Ausschließungungsprinzip).

Eine solche Belegung ist natürlich nur für $n \geq k$ möglich.

Dann gibt $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}$ verschiedene Belegungen.

d) Die Marken sind ununterscheidbar und in jede Zelle darf höchstens eine Marke gelegt werden
(Ausschließprinzip). Wieder ist eine solche Belegung nur für $n \geq k$ möglich.

Dann gibt es $\binom{n}{k}$ verschiedene Belegungen.

6.7.2 Problem der vertauschten Briefe

Man steckt drei verschiedene Briefe rein zufällig in drei adressierte Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Brief in den richtigen Umschlag gesteckt wird ?

A : Kein Brief steckt im richtigen Umschlag.

B_i : Der i.te Brief steckt im richtigen Umschlag.

$$\left|\Omega\right| = 3!$$

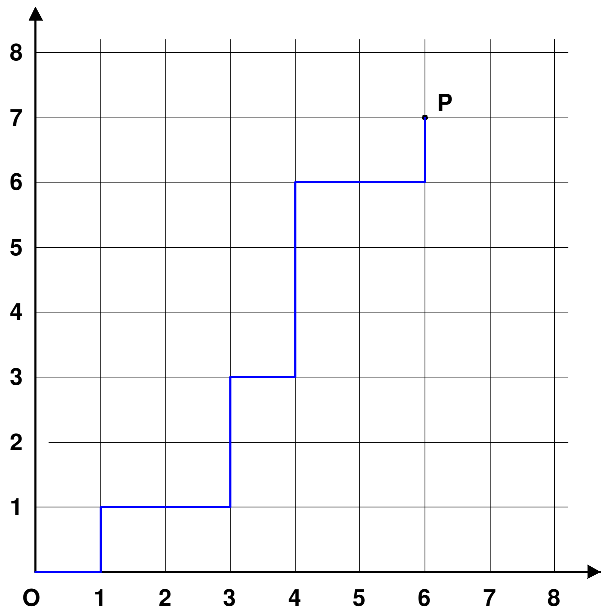
Dann gilt

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) =$$

$$= 1 - \left[P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) - P(B_1 \cap B_2) - P(B_1 \cap B_3) - P(B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)\right] =$$

$$= 1 - \binom{3}{1} \cdot \frac{2!}{3!} + \binom{3}{2} \cdot \frac{1!}{3!} - \binom{3}{3} \cdot \frac{0!}{3!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

6.7.3 Wege im zweidimensionalen Gitter



Wie viele verschiedene kürzeste Gitterwege vom Punkte $O\left(0\,\middle|\,0\right)$ zum Punkt $P\left(6\,\middle|\,7\right)$ oder allgemeiner zum Punkt $P\left(n\,\middle|\,m\right)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ gibt es ?

Lösung :

Ein kürzester Weg von O zu P besteht aus 6 Schritten nach rechts (r) und 7 Schritten nach oben (u)., lässt sich als durch ein 13-Tupel bestehend aus 6 "r" und 7 "u" beschreiben.

Der oben eingezeichnete Weg hat mit dieser Notation die Darstellung "rurruuruuurru".

Also gibt es $\frac{(6+7)!}{6!\cdot 7!} = 1716$ verschiedene kürzeste Gitterwege.

Die Anzahl der verschiedenen kürzesten Gitterwege von $O\left(0\,\middle|\,0\right)$ Punkt $P\left(n\,\middle|\,m\right)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ iSt dann gleich $\frac{(n+m)!}{n!\cdot m!}$

6.4 Warteschlangenproblem und Spiegelungsprinzip

In einer Warteschlange vor einer Theaterkasse stehen 6 Personen mit einem 10-Euro Schein und 8 Personen mit einem 20-Euro Schein. Die Kassiererin verfügt bei Kassenöffnung über vier 10-Euroscheine.

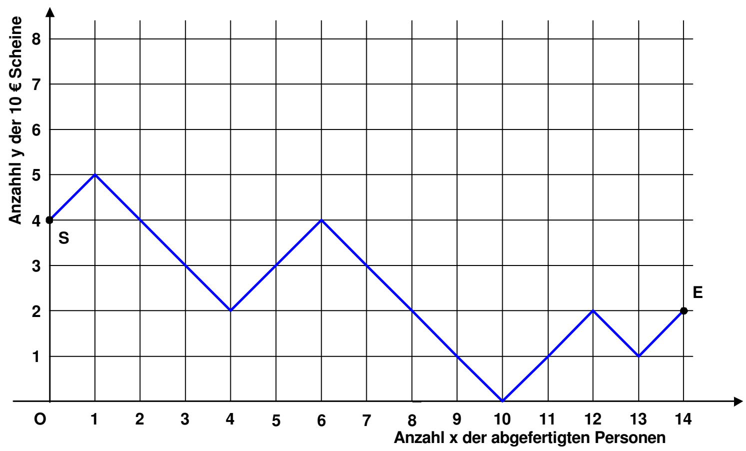
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von

A : Niemand muss auf das Rückgeld warten.

Verbindet man die Punkte des Graphen der Funktion

z : Anzahl der abgefertigten Personen $\rightarrow$ Anzahl der in der Kasse vorhandenen 10 € Scheine

durch Strecken, dann erhält man einen Streckenzug, der die Punkte $S\left(0\,\middle|\,4\right)$ und $E\left(14\,\middle|\,2\right)$ miteinander verbindet.

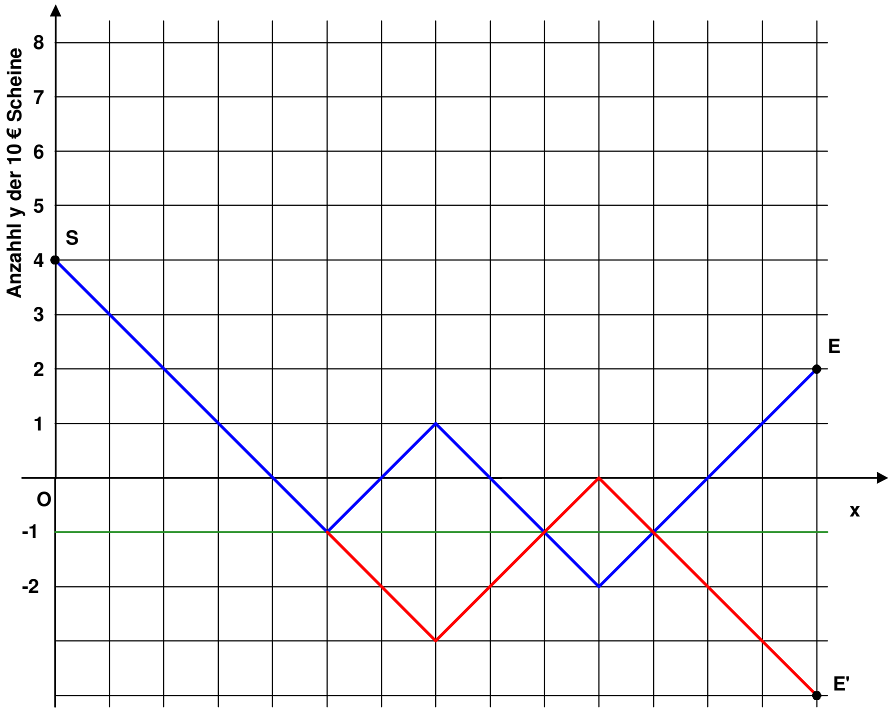


Ein Weg, der diese beiden Strecken verbindet, besteht aus sechs schräg nach oben und acht schräg nach unten verlaufenden Strecken.

Also ergibt sich für die Mächtigkeit des Ergebnisraumes

$$\left|\Omega\right| = \frac{(8+6)!}{8!\cdot 6!}$$

Streckenzüge, welche im ersten Quadranten verlaufen, stellen ein Ergebnis aus dem Ereignis A dar. Schneidet ein Streckenzug die Abszissenachse, dann stellt er ein Ergebnis aus $\overline{A}$ dar.



Diese Streckenzüge haben einen mindestens einen Punkt mit der Geraden $y = -1$ gemeinsam.

Spiegelt man ab dem ersten dieser Punkte den Rest des Streckenzugs an der Geraden

$y = -1$, dann erhält man einen Streckenzug der $S\left(4 \,\middle|\, 0\right)$ mit $E'\left(14 \,\middle|\, -4\right)$ verbindet.

Die Zuordnung ist ist eineindeutig

Für die Anzahl u der nach oben und die Anzahl d der nach unten verlaufenden Strecken dieses Streckenzugs muss gelten

$(1)\, d - u = 8 \quad (2)\, d + u = 14 \quad \Rightarrow \quad d = 11 \quad \Rightarrow \quad u = 3.$

Also $\left|\overline{A}\right| = \dfrac{(11+3)!}{11! \cdot 3!}$ und damit $P(A) = 1 - \dfrac{\frac{14!}{11! \cdot 3!}}{\frac{14!}{8! \cdot 6!}} = 1 - \dfrac{8! \cdot 6!}{11! \cdot 3!} \approx 87{,}9\%$

Allgemeine Rechnung :

Anzahl der 10-Euro Scheine in der Kasse : k

Anzahl der Leute mit einem 10-Euro Schein in der Warteschlange : m

Anzahl der Leute mit einem 20-Euro Schein in der Warteschlange : n

Bedingung : $k + m \geq n$

Startpunkt : $S\left(0 \,\middle|\, k\right)$ Endpunkt : $E\left(k + m - n \,\middle|\, m + n\right)$

Anzahl der steigenden Strecken : $u = m$

Anzahl der fallenden Strecken : $d = n$

Mächtigkeit des Ergebnisraumes : $\left|\Omega\right| = \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$

Gespiegelter Endpunkt : $E'\left(m + n \,\middle|\, n - k - m - 2\right)$

Berechnung von u und d :

(1) $u + d = m + n$ (2) $d - u = 2k + m - n + 2$

$\Rightarrow d = k + m + 1 \quad \Rightarrow \quad u = n - k - 1$

$$P(A) = 1 - \frac{n!\cdot m!}{(k+m+1)!\cdot(n-k-1)!}$$
