IV. Wahrscheinlichkeit

4.1 Definition und Folgerungen

Definition :

$\mathfrak{A}$ sei eine Ereignisalgebra.

Eine Funktion P, die jedem Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ eine reelle Zahl zuordnet,

$P : \mathfrak{A} \to \mathbb{R},\ P : A \to P(A),$

heißt ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf $\mathfrak{A}$, wenn gilt

W 1 $\mathbf{P(A) \geq 0 \qquad \forall\, A \in \mathfrak{A}}$

W 2 $\mathbf{P(\Omega) = 1}$

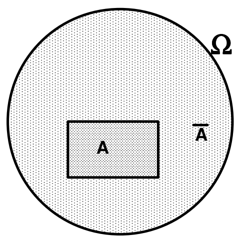
W 3 $\mathbf{A, B \in \mathfrak{A} \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Einen Ergebnisraum Ω, eine dazugehörige Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$ und ein darauf definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß P, nennt man zusammen einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.

$$\boxed{\mathbf{(\Omega, \mathfrak{A}, P)}}$$

Folgerungen :

$$\boxed{\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A})}}$$



Beweis:

Es ist $A \cap \overline{A} = \varnothing$ und $A \cup \overline{A} = \Omega$:

Also $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

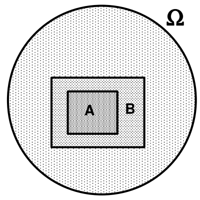
$$\boxed{\mathbf{P(\varnothing) = 0}}$$

Beweis :

$P(\varnothing) = 1 - P(\overline{\varnothing}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

$\boxed{\mathbf{A \subseteq B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)}}$

Beweis :



$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \geq P(A)$

da $A \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$ und $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$

$\boxed{\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathfrak{A}}}$

Beweis :

$\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega \;\Rightarrow\; P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow\; 0 \leq P(A) \leq 1$

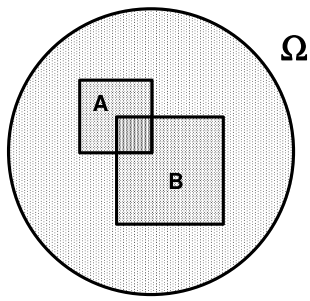
$\boxed{\mathbf{P(A_1 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots\ldots + P(A_n)}}$ falls $\mathbf{A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n}$

Beweis :

Durch Induktion

$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$

Beweis :



$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Verallgemeinerung :

Formel von SYLVESTER

Für n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ aus einem Wahrscheinlichkeitsraum gilt

$$\mathbf{P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots}$$

Beweis : Durch Induktion

4.2 Modelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Beispiel :

Experiment : Einmaliges Würfeln

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$

$\{\omega\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P_1(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$P_2(\{\omega\})$	1/6	1/12	1/4	1/6	1/6	1/6
$P_3(\{\omega\})$	1/2	0	0	0	0	1/2

Durch das Axiomensystem ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß nicht eindeutig festgelegt. Man spricht von einem **unvollständigen Axiomensystem**.

Ist aber A_1, ..., A_n eine Zerlegung von Ω, dann muss jedoch für jede Wahrscheinlichkeitsfunktion P gelten

$$\boxed{\mathbf{P(A_1) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n) = 1}}$$

Speziell ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festgelegt, wenn die Wahrscheinlichkeiten für alle einelementigen Ereignisse gegeben sind.

Beispiel :

Für das

Zufallsexperiment : Werfen eines Würfels

und das

Ereignis A : Die Augenzahl ist gerade

erhält man, falls das Wahrscheinlichkeitsmaß P_1 gilt,

$$P_1(A) = P_1(\{2, 4, 6\}) = P_1(\{2\}) + P_1(\{4\}) + P_1(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Gilt das Wahrscheinlichkeitsmaß P_2, dann ist

$$P_2(A) = P_2(\{2, 4, 6\}) = P_2(\{2\}) + P_2(\{4\}) + P_2(\{6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

4.3 Die Vierfeldertafel

Beispiel :

10% der Gäste eines Restaurants rauchen vor dem Mittagessen und 24% danach. 70% rauchen überhaupt nicht.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast vorher und nachher raucht ?

V : Der Gast raucht **v**or dem Essen

N : der Gast raucht **n**ach dem Essen

	$P(V)$	**$P(\overline{V})$**	
$P(N)$	<u>0,04</u>	0,20	**0,24**
$P(\overline{N})$	0,06	**0,70**	0,76
	0,10	0,90	1

Sind A und B Ereignisse aus der Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, dann bilden die Ereignisse

$A \cap B$: A und B treten ein

$A \cap \overline{B}$: Es tritt A, aber nicht B ein

$\overline{A} \cap B$: Es tritt B, aber nicht A ein

$\overline{A} \cap \overline{B}$: Weder A noch B treten ein

eine Zerlegung von Ω.

Ihre Wahrscheinlichkeiten trägt man in einer sog. **Vierfeldertafel** ein.

	A	**$\overline{A}$**	
B	**$P(A \cap B)$**	**$P(\overline{A} \cap B$**	**$P(B)$**
$\overline{B}$	**$P(A \cap \overline{B})$**	**$P(\overline{A} \cap \overline{B})$**	**$P(\overline{B})$**
	$P(A)$	**$P(\overline{A})$**	**1**

Dabei muss u.a. gelten

(1) $P(A) + P(\overline{A}) = P(B) + P(\overline{B}) = 1$

(2) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ bzw. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

Bemerkung :

Vierfeldertafeln lassen sich auch für die

a) die absolute

und

b) die relative

Häufigkeit von Ereignissen anlegen.
