I. Zufallsexperimente und Ergebnisräume

===

1.1 Der Ergebnisraum

Viele Experimente besitzen keine exakt vorhersagbaren Ergebnisse. Man nennt sie daher Zufallsexperimente.

Beispiel :

Experiment : Werfen eines Würfels

Menge der möglichen Ergebnisse : $\Omega = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$

Experiment : Werfen einer Münze

Menge der möglichen Ergebnisse : $\Omega = \left\{ Z, K \right\}$

Definition :

Bei einem **Zufallsexperiment** seien n verschiedene Ergebnisse ω_i , $1 \le i \le n$, möglich. Dann heißt die Menge

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega = \left\{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \right\}}}$$

ein **Ergebnisraum** des Experiments.

Die Anzahl n der Elemente von Ω heißt **Mächtigkeit** $\left| \Omega \right|$ von Ω.

Bemerkung :

Ein und demselben Zufallsexperiment können je nach Betrachtungsweise verschiedene Ergebnisräume zugeordnet werden.

Beispiel :

Experiment : Werfen eines Würfels

Ergebnisraum "Augenzahlen" : $\Omega_1 = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$

Ergebnisraum "**g**erade oder **u**ngerade Augenzahl" : $\Omega_2 = \{g, u\}$

Da sich Ω_1 durch

$1 \to u$, $2 \to g$, $3 \to u$ usw.

auf Ω_2 abbilden lässt, heißt Ω_2 eine **Vergröberung** von Ω_1 und umgekehrt Ω_1 eine **Verfeinerung** von Ω_2.

1.2 Der Ergebnisraum zusammengesetzter Zufallsexperimente

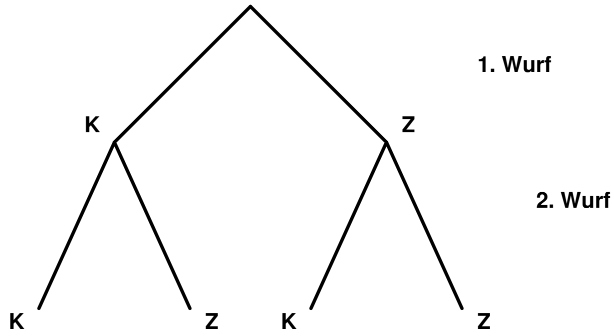
Sowohl die mehrmalige Hintereinanderausführung eines Zufallsexperiments als auch mehrere verschiedene Zufallexperimente lassen sich als neues Zufallsexperiment auffassen.

Beispiele :

Experiment : Zweimaliges Werfen einer Münze

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{(K \mid K), (K \mid Z), (Z \mid K), (Z \mid Z)\right\} = \left\{KK, KZ, ZK, ZZ\right\}$

Das Zustandekommen der Ergebnisse bei einem zusammengesetzten Zufallsexperiment lässt sich durch ein **Baumdiagramm** veranschaulichen

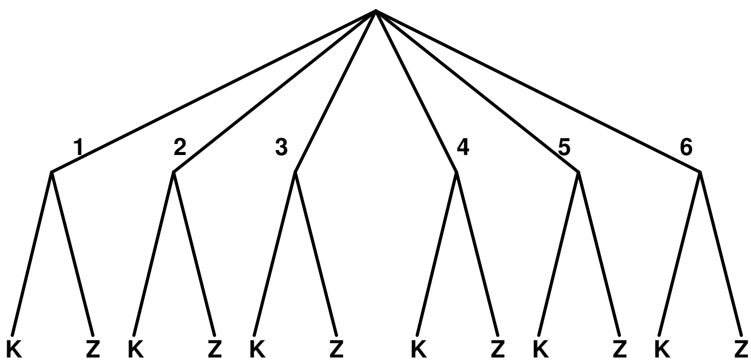


$|\Omega| = 2 \cdot 2 = 4$

Experiment : Gleichzeitiges Werfen von Würfel und Münze

Ergebnisraum: $\Omega = \left\{(1 \mid K), (2 \mid K), \ ...., (6 \mid K), (6 \mid Z)\right\}$

Baumdiagramm :



$|\Omega| = 6 \cdot 2 = 12$

Bemerkung :

Einen von oben nach unten führenden Streckenzug in einem Baumdiagramm nennt man einen **Pfad**, jede Strecke eines Pfades einen **Zweig**. Die Anzahl aller Pfade ist gleich der Mächtigkeit des Ergebnisraumes.

Die Ergebnisse eines n-stufigen Zufallsexperiments gibt man als n-Tupel bzw. als "n-Wörter" an. Das sind Anordnungen von n Elementen in einer Reihe bzw. "Wörter" mit n "Buchstaben" . Genauer ist die

Definition :

Sind A und B zwei Mengen, dann heißt die Menge der geordneten Paare

$$A \times B = \left\{ (a \mid b) \,\middle|\, a \in A \wedge b \in B \right\}$$

die **Produktmenge** oder das **kartessische Produkt** von A und B. Ihre Elemente heißen auch **2-Tupel**.

Es ist $(a_1 | b_1) = (a_2 | b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Beispiel :

Ist $A = \left\{ a_1, a_2, a_3 \right\}$ und $B = \left\{ b_1, b_2 \right\}$, dann zeigt die Anordnung

	b_1	b_2
a_1	$(a_1 \mid b_1)$	$(a_1 \mid b_2)$
a_2	$(a_2 \mid b_1)$	$(a_2 \mid b_2)$
a_3	$(a_3 \mid b_2)$	$(a_3 \mid b_2)$

$$A \times B = \left\{ (a_1 \mid b_1), (a_1 \mid b_2), (a_2 \mid b_1), (a_2 \mid b_3), (a_3 \mid b_1), (a_3 \mid b_2) \right\} \text{ und } \left| A \times B \right| = 3 \cdot 2 = 6$$

Bemerkungen :

a) Ist $A = B$, dann schreibt man $A \times B = A \times A = A^2$

b) Analog definiert man die Produktmenge von drei, vier oder allgemein von n, $n \in \mathbb{N}$, Mengen und bezeichnet deren Elemente als **Tripel, Quadrupel** bzw. allgemein als **n-Tupel**.

c) Sind $A_1, A_2, ..., A_n$ endliche Mengen, dann gilt für die Mächtigkeit ihres kartesischen Produkts

$$\boxed{\left|A_1 \times A_2 \times .... \times A_n\right| = \left|A_1\right| \cdot \left|A_2\right| \cdot ... \cdot \left|A_n\right|}$$ **Zählprinzip**

Speziell ist

$$\boxed{\left|A^n\right| = \left|A\right|^n}$$

Damit gilt für obige Beispiele

$$\Omega = \left\{(K|K), (K|Z), (Z|K), (Z|Z)\right\} = \left\{K, Z\right\} \times \left\{K, Z\right\} = \left\{K, Z\right\}^2 \text{ bzw.}$$

$$\Omega = \left\{(1|K), (2|K), \text{ ...., } (6|K), (6|Z)\right\} = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\} \times \left\{K, Z\right\}$$

1.3 Modelle von Zufallsexperimenten

A Das Ziehen aus einer Urne

Beispiel :

Eine Urne enthält 3 weiße, 2 rote und 1 schwarze Kugel. Es werden 2 Kugeln

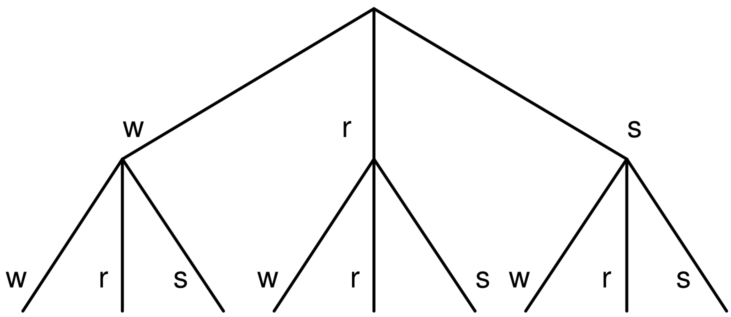
a) einzeln und hintereinander mit Zurücklegen

b) einzeln und hintereinander ohne Zurücklegen

b) gleichzeitig

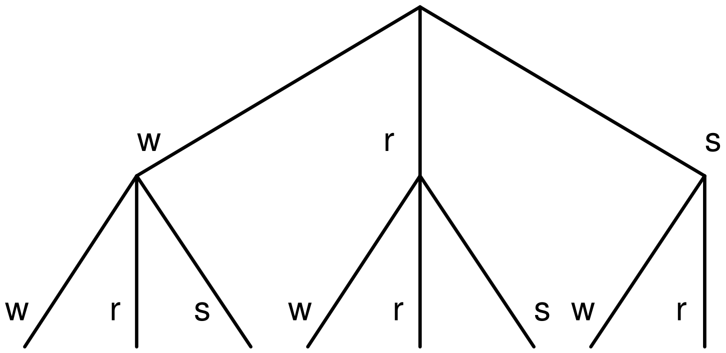
entnommen.

a) Baumdiagramm :



$$\Omega = \left\{ ww, wr, ws, rw, rr, rs, sw, sr, ss \right\}$$

b) Baumdiagramm



$$\Omega = \left\{ ww, wr, ws, rw, rr, rs, sw, sr \right\}$$

c) $\Omega = \left\{ \{w,w\}, \{w,r\}, \{r,r\}, \{r,s\} \right\}$

B Anordnungen

Auch zufällige Anordnungen in einer Reihe lassen sich durch Tupel beschreiben.

So hat die zufällige Anordnung von je einer weißen, einer roten und einer schwarzen Kugel den Ergebnisraum

$$\Omega = \left\{\text{wrs, wsr, rws, rsw, swr, srw}\right\}$$

1.3 Beispielaufgaben

Ein Würfel wird solange geworfen, bis man die Augenzahl 3 gewürfelt hat, höchstens aber dreimal.

$$\Omega = \left\{ 3,\ \overline{3}3,\ \overline{3}\overline{3}3,\ \overline{3}\overline{3}\overline{3} \right\}$$

Eine Münze wird solange geworfen, bis eine Seite zweimal obenliegt.

$$\Omega = \left\{ ZZ,\ KK,\ KZZ,\ ZKK,\ KZK,\ ZKZ \right\}$$