Anwendung der Normalenform einer Ebenengleichung

===

1. Gegenseitige Lage von Ebenen - Schnittwinkel

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ und $F: 3x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ und $G: 6x_1 - 8x_2 - 1 = 0$

a) Zeige, dass sich E und F schneiden und bestimme ihren Schnittwinkel auf 0,1° genau.

b) Bestimme die Gleichung einer Ebene H, die senkrecht zu E und F verläuft und durch den Punkt $P(-1|\,0|\,2)$ geht.

c) Zeige, dass F und G zueinander parallel sind.

---

1. a) $\alpha \approx 82{,}3°$ b) $G: 4x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 24 = 0$ c) trivial

---

2. Gegeben sind die Ebene $E: x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ und die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Die Gerade g schneidet E. Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels auf 0,1° genau.

b) Zeige Sie, dass h parallel zu E ist.

---

2. a) $\alpha \approx 6{,}4°$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

---

3. Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. Ebene - Spiegelung an Geraden und Ebenen

Gegeben ist der Punkt $P(1|\,2|\,0)$ die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 = 0$

a) Bestimme den Abstand des Punktes P von g und und den Bildpunkt P' von P bei der Spiegelung an g.

b) Bestimme den Abstand des Punktes P von E und und den Bildpunkt P' von P bei der Spiegelung an E.

c) Bestimme die Gleichung der Bildgeraden g' von g bei der Spiegelung an P.

d) Bestimme die Gleichung der Bildebene E' von E bei der Spiegelung an P.

---

3. a) $d(P; g) = \sqrt{3}$ $P'(3|0|-2)$ b) $d(P; E) = \frac{5}{3}$ $P'(\frac{29}{9}|-\frac{2}{9}|\frac{10}{9})$

c) $g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $E': 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 7 = 0$

---

4. Gegeben sind die Punkte A(–5|4|2), B(7|–1|–2), C(–5|–2|–1) und D(5,5|–8|20), sowie die Gerade g, die durch den Punkt B geht und parallel zur x_2-Achse ist.

a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene ABC.

b) Bestimme den Abstand vom Punkt D zur Ebene ABC.

c) Bestimme den Punkt der Ebene ABC, welcher den kürzesten Abstand zum Punkt D hat.

d) Bestimme den Abstand vom Punkt A zur Geraden g.

---

4. a) $x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 5 = 0$ b) $d(D; E) = 22{,}5$ c) F(3|2|0) d) $d(A; g) = 4\sqrt{10}$

---

5. Gegeben : $E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 19 = 0$ und $A(3|3|-5)$

Gesucht : Gerade g durch den Punkt A, die auf der Ebene E senkrecht steht.

---

5. $g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

6. Gegeben : $O(0|0|0)$, $A(1|-2|2)$, $B(1|2|2)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesucht : Die Abstände der Punkte O, A und B von der Ebene E.

---

6. $d(O; E) = \frac{2}{3}$ $d(A; E) = 2\frac{1}{3}$ $d(B; E) = \frac{1}{3}$

---

7. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

7. a) $d(g; h) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $d(g;h) = 4\sqrt{2}$

---

8. Berechnen Sie den Abstand des Punktes A(2| 5| 1) von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

8. $d(A; g) = 4{,}2\sqrt{5}$

---

9. Wandeln Sie zuerst die Punkt-Richtungs-Gleichung der gegebenen Ebene E in die Normalengleichung um und berechnen Sie dann den Schnittpunkt S mit der Geraden g , wenn gilt

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---

9. $2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \quad S(-8|-1|19)$

---

10. Wandeln Sie die Normalengleichung der Ebene E in eine möglichst einfache Parametergleichung dieser Ebene um.

Die lautet die Gleichung der Spurgeraden von E in der x_1x_3 - Koordinatenebene ?

a) $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4 = 0$ b) $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4 = 0$

c) $E: x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$ d) $E: 3x_1 - 2x_2 + 4 = 0$

e) $E: 3x_1 - 4x_2 = 0$ f) $E: 4x_1 + 3x_2 = 0$

---

10. a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ usw.

---

11. Durch $E_k: x_1 - kx_2 + 2x_3 - 4 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$ wird eine Schar von Ebenen angegeben.

a) Beschreiben Sie diese Schar möglichst genau!

Begründen Sie, dass die Schnittmenge aller Ebenen der Schar eine Geraden g ist.

Bestimmen Sie eine Gleichung von g .

b) Gibt es eine Ebene F , die g enthält, aber nicht zur Schar gehört?

c) Gibt es Geraden h , die mit keiner Ebene der Schar gemeinsame Punkte haben ?

---

11. a) Geradenbüschel $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

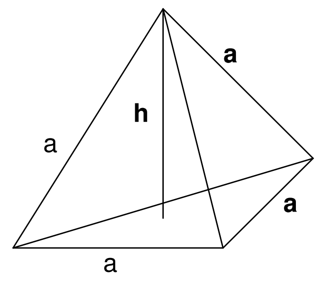
b) x_1x_3-Koordinatenebene

c) Geraden in F, die echt parallel zu g sind.

---

12. Geben ist ein regulären Tetraeder.

a) Bestätigen Sie die Formel für das Volumen $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.



b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen des Tetraeders?

c) Wo liegt der Mittelpunkt der dem Tetraede umbeschriebenen Kugel ?
Wie groß ist der Radius ?

d) Wo liegt der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel ? Wie groß ist der Radius ?

---

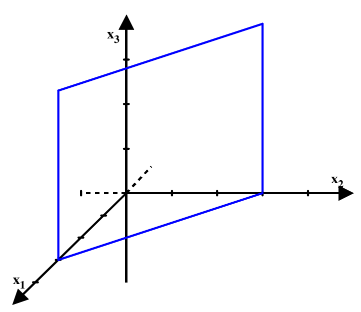
12. Elementargeometrische Rechnung

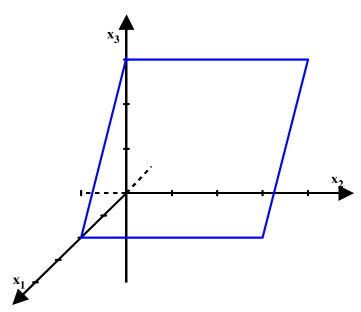
---

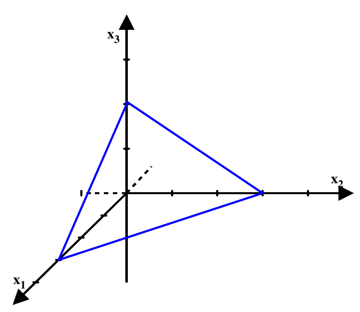
13. a) Geben Sie die Gleichung der drei dargestellten Ebenen E_1, E_2 und E_3 in Normalenform an.

b) Geben Sie eine Schar von Ebenen an, die E_1 und E_2 enthält.

c) Geben Sie eine Schar von Ebenen an, die E_1 und E_3 enthält.







---

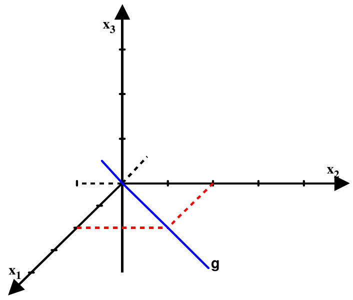
13. a) $E_1: x_1 + x_2 - 3 = 0 \quad E_2: 3x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \quad E_3: \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_1}{2} = 1$

b) $x_1 + x_2 - 3 + k \cdot (3x_1 + 2x_3 - 6) = 0$ c) analog zu b)

---

14. a) Geben Sie die Gleichung der abgebildeten Geraden g an.

b) Geben Sie eine Schar von Ebenen an, die alle diese Gerade g enthalten.



c) Gibt es eine Ebene, die g enthält und trotzdem nicht der Schar angehört ?

c) Geben Sie nun eine Schar an Ebenen an, die alle diese Gerade g enthalten, wobei keine Ebene der Schar

i) die x_3-Achse enthalten soll. ii) parallel zur x_1x_2 - Ebene sein soll.

iii) den Punkt P(0 | 1 | 1) enthalten soll.

---

14. a) $g : \vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $x_1 + x_2 + k \cdot x_3 = 0$ c) x_1x_2-Koordinatenebene

c) i) $x_1 - x_2 + x_3 + kx_3 = 0$ ii) $x_1 - x_2 + x_3 + k \cdot (x_1 - x_2) = 0$ iii) $x_1 - x_2 + x_3 + k \cdot x_3 = 0$

---

15. Gegeben ist die Schar an Ebenen $E_k : kx_1 - 2kx_2 + x_3 - 4 = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$

a) Gibt es Punkte, die zu allen Ebenen der Schar gehören ?

Geben Sie die Ebene E_k auch in einer geeigneten Parametergleichung an.

b) Skizzieren Sie die Lage von E_0 und von E_k für $k \to \pm\infty$.

c) Zu welchen Ebenen E_k gibt es eine Ebene $E_{k'}$ mit $E_k \perp E_{k'}$?

Wie lautet der Zusammenhang zwischen k und k' ?

d) Bestimmen Sie für jedes k die Spurgerade s_k von E_k mit der x_1x_2 - Ebene!

Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander ?

e) Bestimmen Sie für jedes k die Spurgerade t_k von E_k mit der x_1x_3 - Ebene!

Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander ?

f) Für welche Parameterwerte k gibt es ein k'' mit $t_k \perp t_{k''}$?

Wie lautet der Zusammenhang zwischen k und k'' ?

---

15. Besprochen

---

16. Gegeben sind die Punkte A(1| 2| 3), B(3| 0| 3) und C(k| k + 2| 4) mit $k \in \mathbb{R}$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

a) Durch A, B und C ist eine Schar an Ebenen E_k festgelegt.

Geben Sie eine Gleichung von E_k Parameterform und Normalenform an.

b) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander ?

c) Gibt es Ebenen der Schar, die zur x_1x_2-, x_1x_3- oder zur x_2x_3-Ebene parallel liegen ?

d) Gibt es Geraden, die mit keiner Ebene der Schar gemeinsame Punkte haben ?

e) Gibt es eine Ebene der Schar, die mit der Geraden g keine gemeinsamen Punkte hat ?

f) Welche Punkte der Geraden g sind Schnittpunkte P_k von g mit den Ebenen E_k der Schar ?

g) Der Fußpunkt des Lotes von O auf g ist Welcher der Punkte P_k hat vom Ursprung den kleinsten Abstand ?

---

16. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}k-1\\k\\1\end{pmatrix}$ bzw. $x_1 + x_2 + (1-2k)x_3 + 6k - 6 = 0$

b) Ebenenbüschel durch die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) Es gibt keine solche Ebenen.

d) Alle in der Ebene mit Gleichung $-2x_3 + 6 = 0$ liegenden Geraden, die echt parallel zu s sind.

e) E_2 und g sind echt parallel

f) Der Schnitt von g mit E_k ergibt $P_k\left(\frac{k-4}{k-2} \,\middle|\, \frac{1}{2-k} \,\middle|\, \frac{3k-7}{k-2}\right)$

g) Fußpunkt des Lotes von O ist $P_{3,2}$.

---

17. Gegeben : $A(1|2|-1)$, $B(3|2|3)$ und $C(1|0|-1)$.

a) Bestimmen Sie eine Normalengleichung der durch A, B und C bestimmten Ebene E.

b) Wo liegen alle Mittelpunkte der Kugeln, die A, B und C enthalten ?

Welche dieser Kugeln hat den kleinsten Radius ?

c) Welche der Kugeln aus b) hat einen Radius, der doppelt so groß ist wie der Schnittkreis dieser Kugel mit der Ebene E?

---

17. a) $E: 2x_1 - x_3 - 3 = 0$

b) Die Mittelpunkt liegen auf der Schnittgerade s der Ebenen, die $[AB]$ und $[AC]$ rechtwinklig halbieren. Es ergibt sich $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt M(2|1|1) von s mit E ist Mittelpunkt der kleinsten Kugel, durch A, B und C.

Der Radius $r = \sqrt{6}$

c) Der Radius der Kugel muss $2\sqrt{6}$ sein. Der Abstand des Mittelpunktes von der Ebene E ist dann

$d = \sqrt{24 - 6} = 3\sqrt{2}$

---

18. Gegeben sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie der Punkt P(0| 2| 0)

a) Die Ebene F enthält die Gerade g und den Punkt P. Geben Sie eine Gleichung der Ebene F an.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Spurgeraden s von F in der x_2x_3 - Ebene.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden h der Ebenen E und F.

---

18. a) $F: -7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6 = 0$ b) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

---

19. Gegeben sind die Punkte A(1| 2| 3), B(−3| 0| 1), C(2| 2| 1), R(0| −2| 3) und P_k(k + 1| 5| k) mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E festlegen und geben Sie eine Gleichung für E an.

b) Für welche Werte von k liegt P_k in der Ebene E ?

Prüfen Sie, ob P_k gegebenenfalls auf der Geraden AB liegt.

Im Folgenden gelte $k = 0$.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden PR mit der Ebene E.

d) Die Ebene E teilt den Raum in zwei Halbräume. Prüfen Sie, ob P und R im gleichen Halbraum liegen!

Welcher der beiden Punkte P bzw. R ist weiter von der Ebene E entfernt ?

e) Prüfen Sie, ob der Punkt S im Innern des Dreiecks ABC liegt !

f) Die Projektion von PR auf die Ebene E in Richtung der x_3-Achse liefert die Gerade h. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

---

19. a) $-2x_1 + 5x_2 - x_3 - 5 = 0$ b) P_6 liegt in E und auf AB

c) S(0,5|1,5|1,5)

d) P und R liegen nicht im gleichen Halbraum ! Die Punkte sind gleich weit von E entfernt !

e) S liegt im Innern.

f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 33 \end{pmatrix}$

---

20. Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Ebene $E: 3x_1 - 4x_3 + 9 = 0$ und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \begin{pmatrix} -59 \\ 60 \\ 35 \end{pmatrix}$

mit $A(40|2|-49)$-

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von E und g.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der senkrechten Projektion h von g auf E.

Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g und h.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B auf der Geraden h so, dass das $P(0|2|0)$ gleichschenklig mit der Spitze bei A ist.

Fertigen Sie dazu zunächst eine saubere Skizze an, die E, g, h, A, S und B enthält.

d) Geben Sie die Innenwinkel im $P(0|2|0)$ an und ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P in der Ebene E so, dass die Pyramide SBAP das Volumen $V = \frac{85}{3}$ besitzt.

Druckfehler !

---

21. Gegeben sind die Punkte $A(-1|0|1)$, $B(-1|-2|0)$ und $C(3|1|2)$ und die Ebene

$E_1: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 7 = 0.$

a) Die Punkte A, B und C legen die Ebene E_2 fest. Geben Sie E_2 in Normalenform an.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

Unter welchem Winkel schneiden sich E_1 und E_2 ?

c) Die Ebenen E_1 und E_2 zerlegen den Raum in 4 Teilräume.

Wo liegen alle Mittelpunkte der Kugeln mit dem Radius $r = 3$, die die beiden Ebenen E_1 und E_2 berühren und im gleichen Teilraum wie der Ursprung liegen ?

---

21. a) $F: x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 9 = 0$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \approx 23°$

d) Die Punkte ergeben sich durch Schnitt einer winkelhalbierenden Ebene von E und D mit einer Parallelen zu E im Abstand 3.
