**Übungsaufgaben**

================================================================

1. a) Bestimme das Lot inkl. Lotfußpunkt vom Punkt $P\left(13 \mid -5 \mid 15\right)$ auf die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6 = 0$.

   Bestimme die Koordinaten des Bildpunkts P' von P bei der Spiegelung von P an E.

   b) Bestimme von $A\left(12 \mid -3 \mid 7\right)$ die Lotebene (Normalebene) inkl. Schnittpunkt auf die Gerade PQ mit

   $P\left(3 \mid -1 \mid 6\right)$ und $Q\left(0 \mid 3 \mid 1\right)$

---

2. a) Bestimme diejenige Gerade g durch den Punkt $P\left(4 \mid 2 \mid 6\right)$, welche zu den beiden Ebenen

   $E: 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ und $F: x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4 = 0$ parallel liegt.

   b) Die Gerade g soll zur Ebene $G: 2x_1 - 5x_2 - tx_3 + 12 = 0$ parallel liegen. Bestimme t.

---

3. Bestimme das Lot (inkl. Lotfußpunkt) von $P\left(14 \mid 12 \mid 15\right)$ auf die Gerade AB mit $A\left(3 \mid 1 \mid 0\right)$ und $B\left(2 \mid 3 \mid 3\right)$.

---

4. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man die Basis $\left[AB\right]$ mit $A\left(5 \mid 4 \mid 0\right)$ und $B\left(-3 \mid 2 \mid 4\right)$ und weiß, dass C auf der Geraden PQ mit $P\left(3 \mid 1 \mid 0\right)$ und $Q\left(4 \mid 2 \mid 5\right)$ liegt. Bestimme C.

---

5. Ein von $A\left(2 \mid 5 \mid 3\right)$ ausgehender Lichtstrahl wird im Punkt $R\left(6 \mid 1 \mid -4\right)$ an einer Ebene reflektiert und geht dann durch $B\left(4 \mid 3 \mid -3\right)$. Bestimme die Gleichung der Ebene.

---

6. Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel k mit Mittelpunkt $M\left(4 \mid 2 \mid -5\right)$, welche die Gerade PQ mit $P\left(3 \mid 3 \mid -1\right)$ und $Q\left(4 \mid 5 \mid 1\right)$ berührt.

---

7. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Gerade PQ mit $P\left(4 \mid 1 \mid 2\right)$ und $Q\left(1 \mid 2 \mid 0\right)$ die Ebene $E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 10 = 0$.

------------------------------------------------------------8.

8. Gegeben sind die drei Punkte $A\left(4 \mid 2 \mid 5\right)$, $B\left(6 \mid 0 \mid 6\right)$ und $C\left(7 \mid 2 \mid 8\right)$.

   a) Ergänzen Sie das Dreieck ABC zum Parallelogramm ABCD und zeigen Sie: ABCD ist sogar ein Quadrat!

   b) Bestimmen Sie den Punkt S in der $x_1x_3$-Koordinatenebene so, dass S als Spitze einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD aufgefasst werden kann.

   c) Berechnen Sie den Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche der Pyramide.

   d) Die Pyramide besitzt eine Umkugel. Wie lautet die Gleichung dieser Kugel?

---

**Lösungen :**

==========================================================================

1. a) Lotgerade durch P zu E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E : E : $2 \cdot (13 + 2\mu) - 2 \cdot (-5 - 2\mu) - (15 - \mu) - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 15 + 9\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{5}{3}$

Damit ergibt sich $\vec{p'} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} + (-\frac{10}{3}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 5/3 \\ 55/3 \end{pmatrix}$ d.h.

b) Gerade PQ : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lotebene zu PQ : $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 83 = 0$

$-3 \cdot (3 - 3\lambda) + 4 \cdot (-1 + 4\lambda) - 5 \cdot (6 - 5\lambda) + 83 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 50\lambda + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -0{,}8$

Einsetzen ergibt den Schnittpunkt $S\left(5{,}4 \,\middle|\, -4{,}2 \,\middle|\, 10\right)$

------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. a) Möglichkeit 1 :

Die Gerade g ist parallel zu zur Schnittgeraden der Ebenen E und F.

Möglichkeit 2 :

Sind $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ die Normalenvektoren von E bzw. F, dann ist $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ ein Richtungsvektor von g.

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$

Gerade g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) Der Richtungsvektor von g muss auf dem Normalenvektor von G senkrecht stehen.

$$\begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ t \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -22+35+13t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$$

---

3. Möglichkeit 1 :

Gerade AB : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lotebene durch P senkrecht zu AB : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 55 = 0$

Schnitt dieser Lotebene mit der Geraden AB : $-(3-\mu) + 2\cdot(1+2\mu) + 3\cdot 3\mu - 55 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 4$

Eingesetzen in AB ergibt den Lotfußpunkt $F\left(-1 \middle| 9 \middle| 12\right)$

Gleichung des Lotes PF : : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Möglichkeit 2 :

Setze den Lotfußpunktes als allgemeinen Geradenpunkt an.

---

4. Richtungsvektoren : $\overrightarrow{RA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zugehörige Einheitsvektoren : $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der gesuchten Ebene ist $\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Normalenform der Ebene : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 + x_3 + 9 = 0$

---

5. Möglichkeit 1 :

C ist der Schnittpunkt der orthogonalen Symmetrieebene von $\left[AB\right]$ mit der Geraden PQ.

Gerade PQ : $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ Mittelpunkt der Strecke $\left[AB\right]$ : $\vec{m} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-8\\-2\\4\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$

Symmetrieebene : $\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

Schnitt mit PQ : $4\cdot(3+\mu) + (1+\mu) - 2\cdot 5\mu - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu = 2$

Einsetzen ergibt $C\left(5\,\middle|\,3\,\middle|\,10\right)$

Möglichkeit 2 :

Setze C als allgemeinen Geradenpunkt an und bestimme C mit der Bedingung $\overline{AC} = \overline{BC}$.

---

6. Die Kugel geht durch den Lotfußpunkt F des Lotes von M auf PQ :

Gerade PQ : $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Lotebene durch M zu PQ : $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}\right] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 0$

Schnitt mit PQ : $(3+\lambda) + 2\cdot(3+2\lambda) + 2\cdot(-1+2\lambda) + 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = -1$

In PQ eingesetzt ergibt sich $F\left(2\,\middle|\,1\,\middle|\,1\right)$ und $\overline{MF} = 3$.

Gleichung der Kugel :

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right]^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-4)^2+(x_2-2)^2+(x_3+5)^2 = 9$$

Alternativen (besser)

1. Bestimmung des Abstandes von M zu PQ mit Hilfe des Vektorprodukts.

2. Setze F als allgemeinen Geradenpunkt an. Es ist dann .r = $\overline{MF}$

---

7. Richtungsvektor der Geraden PQ : $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{14}$

Normalenvektor der Ebene : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{n}\right| = \sqrt{14}$

Skalarprodukt : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 4$

Winkel zwischen PQ und E : $\sin\alpha = \left|\dfrac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}\right| \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 16{,}6°$

---

8. a) $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,,\ \overline{AB} = \overline{BC} = 3$

Also ist ABCD ein Quadrat.

b) Der Punkt S liegt auf dem Lot zur Ebene E(ABC) durch den Diagonalenschnittpunkt M des Grundflächenquadrats und in der $x_1x_3$-Koordinatenebene.

1. $\vec{m} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 2 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$

2. $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Lotgerade h : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 2 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. Schnitt mit der $x_1x_3$-Koordinatenebene : $x_2 = 2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$

Eingesetzt ergibt sich $S\left(1{,}5 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 10{,}5\right)$

c) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AS} = -18$. Also $\sin\alpha = \left| \dfrac{-18}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2{,}5)^2 + (-2)^2 + 5{,}5^2}} \right|$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}5°$

d) Der Mittelpunkt der Umkugel liegt auf der Geraden h und der Symmtrieebene der Seitenkante $\left[AS\right]$:

Mittellpunkt der Kante $\left[AS\right]$: $\overrightarrow{m_1} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{s}) = \begin{pmatrix} 2{,}75 \\ 1 \\ 7{,}75 \end{pmatrix}$

Gleichung der Symmetrieebene : $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 22 \end{pmatrix} \cdot \left[ \overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2{,}75 \\ 1 \\ 7{,}75 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10x_1 - 8x_2 + 22x_3 - 135 = 0$

Schnitt der Symmetriebene mit h :

$-10 \cdot (5{,}5 + 2\lambda) - 8 \cdot (2 + \lambda) + 22 \cdot (6{,}5 - 2\lambda) - 135 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -63 - 72\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{7}{8}$

In h eingesetzt : $M_2\left(3{,}75 \,\middle|\, 1{,}125 \,\middle|\, 8{,}25\right)$

---