Amnalytische Geometrie

==

1. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ die Geraden } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$$

sowie die Ebene E durch die Punkte $A(-5 \mid 1 \mid 2)$, $B(0 \mid 3 \mid 6)$ und $C(-4 \mid 5 \mid 1)$ gegeben.

a) K ist die kleinste Kugel, die g und h als Tangenten besitzt. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius dieser Kugel.

b) Zeigen Sie dass die Ebene E die Kugel schneidet K und bestimmen Sie den Radius des Schnittkreises k.

c) Dieser Schnittkreis k ist die Grundfläche eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinien Tangenten an die Kugel k sind. Bestimmen Sie die Höhe dieses Kegels.

----

2. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte

$A(2 \mid -1 \mid 0)$ und $C(1 \mid 2 \mid -11)$ sowie die Geradenschar $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+3t \\ -11t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden in einer Ebene E liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ auf der Geraden g_0 so, dass gilt: $\overline{AB} = 12$ und $b_1 < 0$.

c) Zeigen Sie, dass C auf einer Geraden der Schar liegt und berechnen Sie den Abstand der Geraden g_0 und g_1.

d) Begründen Sie, dass es einen Punkt D auf g_1 gibt, der zusammen mit den Punkten A, B und C ein achsensymmetrisches Trapez festlegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten von D und eine Gleichung der Symmetrieachse s dieses Trapezes ABCD.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes

Die Kugel K hat den Mittelpunkt $M(-8 \mid -3 \mid 0)$ und den Radius $r = 6\sqrt{2}$

f) Begründen Sie, dass k die Ebene E schneidet.

Wie groß ist der Radius des Schnittkreises ?

g) ABCDS ist eine Pyramide, deren Spitze S auf der Kugel k liegt. Berechnen Sie das größtmögliche Volumen, das eine solche Pyramide haben kann.

---

3. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A\left(4 \mid -1 \mid 1\right)$, $B\left(0 \mid 3 \mid 1\right)$ und $D\left(2 \mid -1 \mid 3\right)$ gegeben.

a) Durch einen weiteren Punkt C wird das Dreieck ABD zu einem achsensymmetrischen Trapez ABCD ergänzt. $\left[AB\right]$ ist dabei die längere der beiden parallelen Seiten.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C und zeigen Sie, dass die beiden parallelen Seiten dieses Trapezes den Abstand $\sqrt{6}$ haben.

b) Das Trapez ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Ursprung O ist. Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

c) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt M von $\left[AB\right]$ zugleich Umkreismittelpunkt des Trapezes ist.

---

4. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A\left(2 \mid 1 \mid 9\right)$, $B\left(6 \mid -1 \mid 5\right)$ und $P\left(2 \mid -8 \mid 0\right)$

und die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ein weiterer Punkt Q entsteht durch Spiegelung von P an der Ebene E.

a) Zeigen Sie, daß E die Symmetrieebene der Punkte A und B ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten von Q.

c) Begründen Sie, dass man ein ebenes Viereck mit sich nicht überschneidenden Seiten erhält, wenn man die Punkte A, B, P und Q in der Reihenfolge AQPBA verbindet.

Fertigen Sie eine Skizze an, welche die Lage dieses Vierecks zu der Ebene E erkennen lässt.

d) Berechnen Sie die Innenwinkel des Vierecks AQPB (auf Grad gerundet).

Der Punkt $S\left(0\mid -4\mid 5\right)$ liegt auf der durch das Viereck AQPB bestimmten Ebene (Nachweis nicht erforderlich).

e) Zeigen Sie, dass der Punkt S folgende Eigenschaft hat :

Er hat von A, B, P und Q die gleiche Entfernung.

f) Begründen Sie, dass alle Punkte mit der in Teilaufgabe 3. a)angegebenen Eigenschaft auf einer Geraden liegen.

g) Liegt S innerhalb oder außerhalb des Vierecks AQPB ? Die Antwort ist zu begründen.

---

6. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(1\mid 2\mid 3\right)$, $B\left(5\mid 0\mid -1\right)$ und $D\left(-1\mid 6\mid -1\right)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufeinander senkrecht stehen und gleiche Beträge haben.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes C so, dass ABCD zu einem Quadrat wird. Berechnen Sie auch die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M.

$\left[\text{zur Kontrolle : } M\left(2\mid 3\mid -1\right)\right]$

c) Durch das Quadrat ABCD und den Punkt $S\left(6\mid 7\mid 1\right)$ ist eine Pyramide mit der Spitze S gegeben.

d) Weisen Sie nach, daß $\left[SM\right]$ die Höhe der Pyramide ist. Berechnen Sie den Rauminhalt der Pyramide.

e) Welchen Winkel (auf Grad gerundet) schließt die Seitenkante $\left[SA\right]$ mit der Höhe $\left[SM\right]$ der Pyramide ein ?

---

5. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ die Gerade

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und die Punke $A(3|-2|2)$ und $B(5|-6|-2)$

a) Bestimmen Sie auf g den den Mittelpunkt M_1 einer Kugel K_1 durch A und B. Berechnen Sie auch den Radius r_1 dieser Kugel.

b) Bestimmen den Mittelpunkt $M_2 \in g$ und den Radius r_2 einer Kugel K_2, die K_1 und die x_1x_2-Koordinatenebene von oben berührt.

Stochastik

==

1. Der Schachweltmeister spielt 20 Partien gegen einen Schachcomputer. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 20% und mit 55% Wahrscheinlichkeit endet ein Spiel unentschieden (remis).

   a) Berechnen Sie die W'keit, dass mindestens 8, aber weniger als 13 der Partien remis enden.

   b) Berechnen Sie die W'keiten folgender Ereignisse

   A : Der Weltmeister gewinnt mehr als zwei Spiele, darunter auch das letzte

   B : Der Weltmeister gewinnt insgesamt 4 Spiele, darunter genau zwei hintereinander.

   C : Das Duell Mensch-Maschine endet mit 4 Siegen des Weltmeisters, 10 Unentschieden und 6 Siegen des Computers.

   c) Wie groß müsste die Gewinnwahrscheinlichkeit des Weltmeisters mindestens sein, damit man vor Beginn der 20 Spiele mit mehr als 99,9% W"keit mit mindestens einem Sieg des Weltmeistersrechnen kann ?

----

2. Eine Firma stellt elektronische Bauteile her, von denen erfahrungsgemäß 5% defekt sind. Ausgeliefert wird der Serienartikel in Packungen zu je 100 Stück.

   a) Bestimmen Sie ein möglichst kleines, zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Anzahl defekter Bauteile einer Packung mit mehr als 50% Wahr'keit liegt.

   b) Wie viele Packungen muss eine Auslieferung mindestens umfassen, damit mit mehr als 90% W'keit mindestens eine Packung mit höchstens zwei defekten Bauteil darunter ist ?

   c) In einer Packung sind genau 10 defekte Bauteile enthalten. Berechnen Sie mit einer Näherungrechnung die W'keit, dass unter 8 entnommen Bauteilen genau 2 defekte sind.

   Erläutern Sie Ihren Ansatz ! Wie berechnet sich die W'keit exakt ? Ansatz genügt !

Lösungen

==

Analytische Geometrie

----

1. a) Man stimmt die gemeinsame Lotstrecke der windschiefen Geraden g und h.

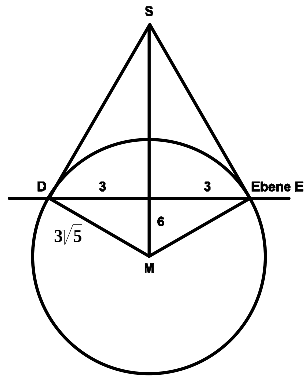
Als Lotfußpunkte ergeben sich $F_1\left(8 \mid -1 \mid 7\right)$ und $F_2\left(8 \mid 11 \mid 1\right)$ und $\overline{F_1F_2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

Damit ist der Mittelpunkt der Kugel $M\left(8 \mid 5 \mid 4\right)$ und der Radius $3\sqrt{5}$.

b) Mit dem üblichen Verfahren berechnet man den Anstande den M von E hat.

Es ergibt sich der Wert 6. Dies ist kleiner als $3\sqrt{5}$. Also schneidet die Kugel die Ebene.

Wie in Aufgabe 2. f) ergibt sich für den Radius des Schnittkreis der Wert 3.



Mit dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck MSD

ergibt sich als Höhe des Kegels $\frac{3^2}{6} = 1{,}5$.

---

1. a) Die Geraden g_t sind zueinander parallel.

Die Umformung : $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -1+3t \\ -11t \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

zeigt, dass alle Punkte der Schargeraden eine Ebene E bilden.

Eine Gleichung der Ebene ist daher $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Es ist $g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Allgemeiner Geradenpunkt : $B\left(2-2\lambda \mid -1+\lambda \mid -2\lambda\right)$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}$

Bedingung : $\overline{AB} = 12 \quad \Rightarrow \quad 4\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4 \vee \lambda = 4$

Eingesetzt ergeben sich : $B_1\left(10 \mid -5 \mid 8\right)$ und $B_2\left(-6 \mid 3 \mid -8\right)$

Wegen $b_1 < 0$ ist $B\left(-6 \mid 3 \mid -8\right)$ der gesuchte Punkt.

c) C in g_t eingesetzt :

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & 1 & = & 2 - t - 2\lambda \\ (2) & 2 & = & -1 + 3\lambda \\ (3) & -11 & = & -11t - 2\lambda \end{array}$$

$$(1) - (3) \;\Big|\; 12 = 2 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$\text{in}(1) \;\Big|\; 1 = 2 - 1 - 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

$$\text{in } (2) \;\Big|\; 2 = -1 + 3 \;\; (w)$$

Also liegt C auf der Schargeraden g_1.

Aufpunkte von g_0 und g_1 : $P\left(2 \mid -1 \mid 0\right)$ bzw. $Q\left(1 \mid 2 \mid -11\right)$

Differenzvektor der Aufpunkte : $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt : $\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad d(g_0; g_1) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\sqrt{5^2 + 20^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

c) C ist der Aufpunkt von g_1. Da g_0 und g_1 parallel sind, gibt es einen Punkt D auf g_1, so dass ABCD ein Trapez ist.

$$\text{Es ist } \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{59}$$

Allgemeiner Geradenpunkt : $D\left(1-2\lambda \mid 2+\lambda \mid -11-2\lambda\right)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} =$

Bedingung : $(-1-2\lambda)^2+(3+\lambda)^2+(-11-2\lambda)^2 = 59 \Rightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -4$

Möglich sind $D_1\left(5 \mid 0 \mid -5\right)$ und $D_2\left(9 \mid -2 \mid -3\right)$

Wegen $\overrightarrow{AD_2} \parallel \overrightarrow{BC}$ ist $D_2\left(5 \mid 0 \mid -5\right)$ der gesuchte Punkt.

Symmetrieaache ist die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Grundlinien

$$\vec{m}_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{m}_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Symmetrieachse : s : } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

e) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CD} = 6$ Also ist $\mathfrak{I}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(12+6)\cdot 5\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$

f) Gegeben : $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Aufgabe a)

Allgemeiner Ebenenpunkt : $F\left(2-\sigma-2\tau \mid -1+3\sigma+\tau \mid -11\sigma-2\tau\right)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 10-\sigma-2\tau \\ 2+3\sigma+\tau \\ -11\sigma-2\tau \end{pmatrix}$

Bedingungen :

(1) $\begin{pmatrix} 10-\sigma-2\tau \\ 2+3\sigma+\tau \\ -11\sigma-2\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} = 0$ (2) $\begin{pmatrix} 10-\sigma-2\tau \\ 2+3\sigma+\tau \\ -11\sigma-2\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Das sich ergebende Gleichungssystem hat die Lösungen $\sigma = 1$ und $\tau = 5$. Dies ergibt den Lotfußpunkt $F\left(-7 \mid 1 \mid 1\right)$

Abstand von M zu E : $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{MF} = \sqrt{1+16+4} = 3\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$

Radius des Schnittkreises : $r_1{}^2 + \overline{MF}^2 = r^2 \Rightarrow r_1{}^2 + 18 = 72 \Rightarrow r_1 = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

g) Für das größtmögliche Volumen muss man dAls Spitze der Pyramide den "Nordpol" der Kugel wählen.

Er hat den Abstand $3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ von der Kugel.

Größtmögliches Volumen ist dann : $\mathfrak{V}_{max} = \frac{1}{3} \cdot 45\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} = 270.$

Alternative :

Vektor senkrecht zu E : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lot durch M zu E: l : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatenform von E (einfacherer Schnitt mit E) :

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & -1 & -2 \\ x_2+1 & 3 & 1 \\ x_3 & -11 & -2 \end{vmatrix} = 5x_1+20x_2+5x_3+10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1+4x_2+x_3+2 = 0$$

Schnitt mit der Ebene : $-8+\omega+4\cdot(-3+4\omega)+\omega+2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 1$

Lotfußpunkt : $F\left(-7\,|\,1\,|\,1\right)$

---

3. a) Analog zu Aufgabe 3 ergibt sich $C\left(0\,|\,1\,|\,3\right)$.

b) Mit der Volumenformel für Pyramiden folgt $\mathfrak{V}_{ABCDO} = 12$

c) Einfaches Nachrechnen

---

4. a) Der Mittelpunkt von $\left[AB\right]$: $\vec{m} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

liegt in E : $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für den Verbindungsvektor : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also steht AB auf de Ebene E senkrecht.

Insgesamt : E ist Symmetrieebene von $\left[AB\right]$.

Gleichung von E.

Mittelpunkt M von $\left[AB\right]$: $M\left(4|\,0\,|\,7\right)$

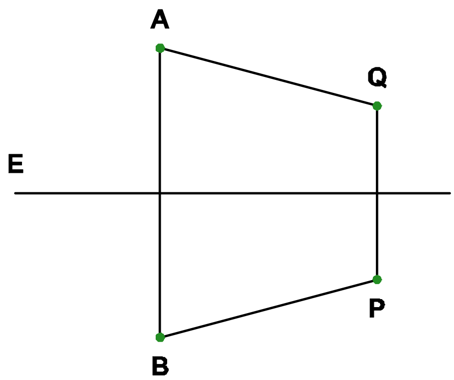
M in E : $8-0-14+6 = 0 \quad \Rightarrow \quad M \in E$

Damit liegen A und B zu E symmetrisch.

b) Das Spiegeln von P (Standardaufgabe) ergibt den Punkt $Q\left(-6 \mid -4 \mid 8\right)$

c) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{QP}$ sind gleichgerichtet.

Man erhält ein gleichschschenkliges Trapez



d) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = 6 \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BP}\right| = 3\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = -18 \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{18}{6 \cdot 3\sqrt{10}} \Rightarrow \beta \approx 72°$

Die Größe der übrigen Winkel folgt durch elementare Rechnung.

e) Man rechnet leicht nach $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SP} = \overline{SQ} = 3\sqrt{5}$

f) Punkte, die von A, B, P und Q gleichen Abstand haben liegen auf dem Schnitt der Symmetrieebene von $\left[AB\right]$ und $\left[PQ\right]$. Dies ist aber eine Gerade.

g) Man berechnet, in welchem Verhält S sie Verbindundstrecke der Mittelpunkte von $\left[AB\right]$ und $\left[PQ\right]$ teilt. Da es positiv ist liegt S auf der Verbindungsstrecke und daher im Innern des Trapezes.

---

5. a) Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ und $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$

b) $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ferner ist $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ d.h. SM steht auf E(ABD) senkrecht.

$\overline{SM} = 6 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{v}_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = \frac{216}{3}$

d) Einfaches Rechnen !

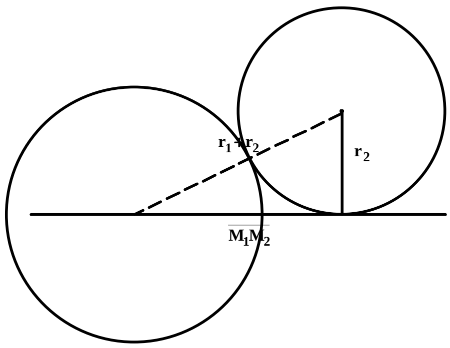
---

6. a) Man bestimmen den Punkt auf g, der von A und B gleich weit entfernt ist. Es ergibt sich

$M_1(4|-4|0)$

b) Vgl Überlegungsfigur. Beachte :

r_2 ist die x_3-Koordinate von M_2



Stochastik

===

1. a) $P(7 \leq X < 13) = P(X \leq 12) - P(X \leq 7) = F^{20}_{0,55}(12) - F^{20}_{0,55}(7) =$

$= 0{,}74799 - 0{,}05803 = 0{,}68996 \approx 69{,}0\%$

b) $P(A) = P(X \geq 2) \cdot 0{,}2 = \left[1 - P(X \leq 1)\right] \cdot 0{,}2 = \left[1 - B(19;\, 0{,}2;\, 0) - B(19;\, 0{,}2;\, 0)\right] \cdot 0{,}2 =$

$= \left[1 - \binom{19}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{19} - \binom{19}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{18}\right] \cdot 0{,}2 \approx 18{,}3\%$

$P(B) = \binom{17}{1} \cdot \binom{16}{2} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} \approx 9{,}2\%$

$$P(C) = \binom{20}{4}\cdot\binom{16}{10}\cdot\binom{6}{6}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}55^{10}\cdot 0{,}25^6 \approx 3{,}8\%$$

c) $P(X \geq 1) > 0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0) < 0{,}001 \Leftrightarrow (1-p)^{20} < 0{,}001 \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[20]{0{,}001}$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit müsste bei etwa 29,3% liegen.

---

2. a) Es ist $F^{100}_{0,05}(6) - F^{100}_{0,05}(4) = 0{,}76601 - 0{,}25784 = 0{,}50817 > 0{,}5$. Also ist $I = [4; 6]$

b) $P(X \leq 2) = F^{100}_{0,05}(2) = 0{,}11826$

$$P(X_1 \geq 1) > 0{,}9 \Leftrightarrow P(X_1 = 0) < 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}11826^n < 0{,}1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}88174} \approx 18{,}3$$

Eine Auslieferung muss mindestens 19 Packungen umfassen.

c) Es handelt sich um eine kleine Stichprobe ohne Zurücklegen. Sie kann als Stichprobe mit Zurücklegen behandelt werden.

$P(X=2) = B(8; 0{,}1; 2) \approx 14{,}9\%$

Exakte Lösung : $P(X=2) = \dfrac{\binom{10}{2}\cdot\binom{90}{6}}{\binom{100}{8}}$
