Hesseform einer Ebenengleichung

===

1. Bestimme den Abstand des Punktes $P\left(1\,\middle|\,2\,\middle|\,3\right)$ von der Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5 = 0$.

---

2. Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0$ und $F: -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 7 = 0$

   a) Zeige, dass E parallel zu F ist und berechne den gegenseitigen Abstand der Ebenen.

   b) Bestimme die Gleichung der Mittenebene von E und F.

---

3. Gegeben ist die Ebene $E: 3x_1 - 4x_2 - 3 = 0$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Begründe : g ist eine Lotgerade zu E.

   b) Bestimme Punkte P und Q auf g, die symmetrische zu E liegen und für die $\overline{PQ} = 2$ ist.

---

4. Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$ und $F: 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 18 = 0$

   a) Bestimme die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen.

   b) Wie lautet die Gleichung einer Ebene, deren Punkte von E doppelt so weit wie von F entfernt sind ?

---

5. Die Ebene $E: 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 36 = 0$ und die drei Koordinatenebenen bilden eine dreiseitige Pyramide. Bestimme die Inkugel der Pyramide.

---

6. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,0\right)$, $A\left(10\,\middle|\,0\,\middle|\,0\right)$, $B\left(0\,\middle|\,4\,\middle|\,0\right)$ und $S\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,6\right)$ sowie die Ebenenschar $E_t: 3x_2 + tx_3 - 3t = 0$.

   Die Punkte A, B und S legen die Ebene F fest.

   a) Zeigen Sie, dass die zu AO parallele Mittelparallele des Dreiecks AOS identisch ist mit der Geraden p, die alle Ebenen der Schar E_t gemeinsam haben.

   Die Punkte A, B, O und S bilden die Ecken der Pyramide ABOS.

   b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABOS.

   c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 die Pramide ABOS in zwei Teilkörper mit gleichem Volumen zerlegt.

   d) Zeigen Sie, dass $M\left(1{,}2\,\middle|\,1{,}2\,\middle|\,1{,}2\right)$ der Mittelpunkt der Inkugel K der Pyramide ABOS ist.

   e) Die Ebenenschar E_t enthält neben der x_1x_3-Ebene eine weitere Tangentialebene von K. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t.

Lösungen :

==

1. HNF von E : E : $\dfrac{2x_1-2x_2+x_3+5}{-3} = 0$

   P in HNF : E : $\dfrac{2\cdot 1-2\cdot 2+3+5}{-3} = -2 \;\Rightarrow\; d(P;\,E) = 2$

   Bestimme den Abstand des Punktes $P\left(1\,\middle|\,2\,\middle|\,3\right)$ von der Ebene E : $2x_1-2x_2+x_3+5 = 0$.

---

2. Gegeben sind die Ebenen E : $2x_1-2x_2+x_3+3 = 0$ und F : $-4x_1+4x_2-2x_3-7 = 0$

   a) $\overrightarrow{n_F} = (-2)\cdot\overrightarrow{n_E} \;\Rightarrow\; F \parallel E$

   $\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,-3\right) \in E$

   HNF von F : $\dfrac{-4x_1+4x_2-2x_3-7}{6} = 0$

   Punkt eingesetzt :

   $\dfrac{-4\cdot 0+4\cdot 0-2\cdot(-3)-7}{6} = -\dfrac{1}{6} \;\Rightarrow\; d(E;\,F) = \dfrac{1}{6}$

   b) HNF von E : $\dfrac{2x_1-2x_2+x_3+3}{-3} = 0$

   Bedingung für Punkte der Mittenebene :

   $$\left|\frac{2x_1-2x_2+x_3+3}{-3}\right| = \left|\frac{-4x_1+4x_2-2x_3-7}{6}\right| \;\Leftrightarrow$$

   $$\frac{2x_1-2x_2+x_3+3}{-3} = \frac{-4x_1+4x_2-2x_3-7}{6} \quad \text{(Widerspruch !)}$$

   $\vee$

   $$\frac{2x_1-2x_2+x_3+3}{-3} = -\frac{-4x_1+4x_2-2x_3-7}{6} \;\Leftrightarrow\; 8x_1-8x_2+4x_3-13 = 0$$

   Letztere Gleichung ist die Gleichung der Mittenebene.

---

3. a) Der Richtungsvektor von g ist Normalenvektor von E. Also ist g Lot zu E.

   b) Allgemeiner Geradenpunkt : $\left(1+3\mu\,\middle|\,5-4\mu\,\middle|\,1\right)$

HNF von E : E : $\dfrac{3x_1 - 4x_2 - 3}{5} = 0$

Bedingung für P und Q :

$$\left|\frac{3\cdot(1+3\mu) - 4\cdot(5-4\mu) - 3}{5}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|-20 + 25\mu\right| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 1 \vee \mu = 0{,}6$$

Eingesetzt ergibt sich : $P\left(4 \,\middle|\, 1 \,\middle|\, 1\right)$ und $Q\left(2{,}8 \,\middle|\, 2{,}6 \,\middle|\, 1\right)$ oder umgekehrt.

---

4. HNF von E : $\dfrac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{3} = 0$ und HNF von F : $\dfrac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 18}{6} = 0$

a) Bedingung für Punkte auf den Winkelhalbierenden :

$$\left|\frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{3}\right| = \left|\frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 18}{6}\right|$$

Auflösung der Betragstriche gibt : $2x_3 - 3 = 0 \vee 4x_1 + 4x_2 - 15 = 0$

b) Bedingung :

$$\left|\frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{3}\right| = 2\cdot\left|\frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 18}{6}\right|$$

Auflösung der Betragstriche gibt : $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0 \vee 6x_1 + 6x_2 + x_3 - 24 = 0$

---

5. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen :

$S_{x_1}\left(-6 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 0\right)$, $S_{x_2}\left(0 \,\middle|\, -6 \,\middle|\, 0\right)$, $S_{x_3}\left(0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 12\right)$

Ist r der Radius der Inkugel, dann muss der Mittelpunkt der Inkugel $M\left(-r \,\middle|\, -r \,\middle|\, r\right)$ sein

HNF von E : E : $\dfrac{6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 36}{-9} = 0$

Bedingung für M : $\left|\dfrac{-6r - 6r - 3r + 36}{-9}\right| = r \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{3}{2} \vee \langle r = 6 \rangle$

---

6. a) Gleichung der Geraden AO : $\vec{x} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

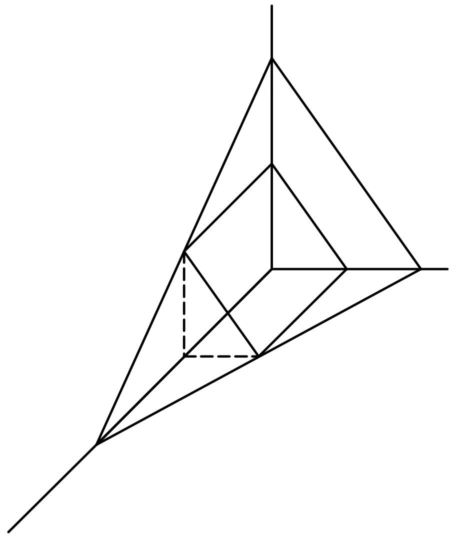
Gleichung der Mittelparallelen p : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ In einem kartesischen ,

Eingesetzt in E_t : $3t - 3t = 0$

b) $\mathfrak{V}_{ABOS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6 = 40.$

c) $E_t : 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0.$

Einer der Teilörper ist ein Prisma mit einer aufgesetzten Pyramide (vgl. Skizze).



Es ist $\frac{1}{8} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 20$

d) Ebene E(ABS) : $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 60 = 0$

Abstand von M zu E : $d(M;E) = \left| \frac{6 \cdot 1{,}2 + 15 \cdot 1{,}2 + 10 \cdot 1{,}2 - 60}{19} \right| = 1{,}2$

e) Man bestimmt die Ebene der Schar, die von M den Abstand 1,2 hat.

HNF von E_t : $\frac{3x_2 + tx_3 - 3t}{\sqrt{9 + t^2}} = 0$

Bedingung : $\left| \frac{3 \cdot 1{,}2 + t \cdot 1{,}2 - 3t}{\sqrt{9 + t^2}} \right| = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \ \vee \ t = 7{,}2$