Analytische Geometrie

===

1. ***Tangentialebene***

a) Welchen Radius hat die Kugel um den Ursprung, welche die Ebene mit der Gleichung

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berührt ?

b) Die Ebene E ist gegeben durch die Punkte $A\left(2 \mid 5 \mid 4\right)$ $B\left(6 \mid 1 \mid 2\right)$ und $C\left(3 \mid 7 \mid 2\right)$.

Die Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M\left(0 \mid 1 \mid -1\right)$.

Berechne die Koordinaten des Berührungspunktes T sowie den Radius der Kugel.

Lösung :

a) Der Radius r ist Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene.

Es ergibt sich $r = 4$

b) Es ergibt sich $T(4 \mid 3 \mid 3)$ und $r = 6$

---

2. ***Abstand Punkt-Ebene***

Gegeben sind die Punkte $A\left(7 \mid -3 \mid 1\right)$, $B\left(2 \mid 0 \mid 5\right)$ und $C\left(9 \mid -3 \mid 1\right)$.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $D\left(4 \mid 4 \mid 4\right)$ zur Ebene durch die Punkte A, B und C.

Lösung :

Es ergibt sich $d(D; E) = 3{,}8$

---

3. ***Pyramide***

Eine quadratische Pyramide mit den an einer Kante liegenden Ecken $A\left(2 \mid 2 \mid 1\right)$ und $B\left(0 \mid 1 \mid 1\right)$ hat die Spitze $S\left(1 \mid 2 \mid 3\right)$.

Die Grundfläche liegt in der Ebene $E: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung :

Es ist $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Flächeninhalt der quadratischen Grundfläche ist also $\mathfrak{A}_{ABCD} = 5$.

Ferner ist $d(S; E) = 1$

Also $\mathfrak{V}_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{5}{3}$

---

4. ***Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck***

Gegeben sind die Punkte $A\left(5 | -4 | 3\right)$ und $B\left(6 | -2 | 3\right)$.

Finden Sie einen Punkt C, der mit den Punkten A und B ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bildet.

Lösung :

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht auf $\overrightarrow{AB}$ senkrecht und hat die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AB}$.

Also $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

5. ***Ebene***

Finden Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die durch den Punkt $A\left(-3 \mid 3 \mid 6\right)$ geht und senkrecht auf dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht.

Lösung :

Ansatz für die Ebene E : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{w}$

mit zwei linear unabhängigen Vektoren, die auf $\vec{v}$ senkrecht stehen.

Zwei solcher Vektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

6. ***Spiegeln an einer Ebene***

Spiegeln Sie den Punkt $A\left(1 \mid -2 \mid 3\right)$ an der Ebene E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung :

Allgemeiner Ebenenpunkt : $F\left(1 + 2\alpha + 4\beta \mid 2 + \alpha + \beta \mid 2 + \beta\right)$

Lotvektor : $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 4\beta \\ 4 + \alpha + \beta \\ -1 + \beta \end{pmatrix}$

Bedingungen : (1) $\begin{pmatrix} 2\alpha+4\beta \\ 4+\alpha+\beta \\ -1+\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und (1) $\begin{pmatrix} 2\alpha+4\beta \\ 4+\alpha+\beta \\ -1+\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ergeben

$\alpha = -5$ und $\beta = \frac{7}{3}$ und damit $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

Spiegelungsprinzip : $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 17/3 \end{pmatrix}$

---

7. ***Schnittwinkel***

Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden

$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 24 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung :

Mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ gilt :

$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 2 \cdot (-7) + (-6) \cdot 6 + 3 \cdot 6 = -14 - 36 + 18 = -32$

$v = \sqrt{4+36+9} = 7$ und $u = \sqrt{49+36+36} = 11$

$\cos\sigma = \left| \frac{-32}{7 \cdot 11} \right| = \frac{32}{77} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 22{,}57°$

---

8. ***Kugel***

Gegeben ist die Kugel K mit dem Mittelpunkt $O(0 \mid 0 \mid 0)$ und $r = 7$ sowie die Geradenschar mit dem Scharparameter a

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Schnittpunkte von g_{-2} mit der Kugel K.

b) Schneide g_a für allgemeines a mit der Kugel. Für welche Werte von a ergeben sich Tangenten. Notiere die Tangentengleichungen.

c) Lege eine Tangentialebene an die Kugel, die eine dieser Tangenten enthält.

Lösung :

a) Schnittbedingung : $(5+2\lambda-0)^2+(2-0)^2+(\overbrace{-2}^{a}+\lambda-0)^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{5} \vee \lambda = -4$

Eingesetzt ergibt sich $S_1\left(-3 \mid 2 \mid -6\right)$ und $S_2\left(6{,}6 \mid 2 \mid -1{,}2\right)$

b) Allgemeine Schnittbedingung :

$$(5+2\lambda-0)^2+(2-0)^2+(a+\lambda-0)^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad 5\lambda^2+(2\lambda+20)+a^2-20 = 0$$

Es existiert nur ein gemeinsamer Punkt, wenn die Diskriminante Null ist :

$$D = (2a+20)^2-4\cdot5\cdot(a^2-20) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2-5a-50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 10 \vee a = -5$$

Tangentengleichungen :

$$g_{10} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_{-5} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Der Berührpunkt B von g_{10} mit der Kugel ist Aufpunkt der Ebene.

Es ist $B\left(-3 \mid 2 \mid 6\right)$.

Als Richtungsvektoren der Tangentialebene wählt man den Richtungsvektor von g_{10} und einen dazu nicht kollinearen Vektor, der auf $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ senkrecht steht. Dies ist z.B. der

Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

9. ***Schnitt von Kugeln***

Bestimme den Radius und den Mittelpunkt des Schnittkreises der Kugeln um $M_1(1 \mid 0 \mid 1)$ und $r_1 = 3$ bzw. $M_2(2 \mid -1 \mid 2)$ und $r_2 = 4$

Lösung :

Kugelgleichungen :

$(x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 + (x_3 - 1)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2x_1 - 2x_3 = 7$

und

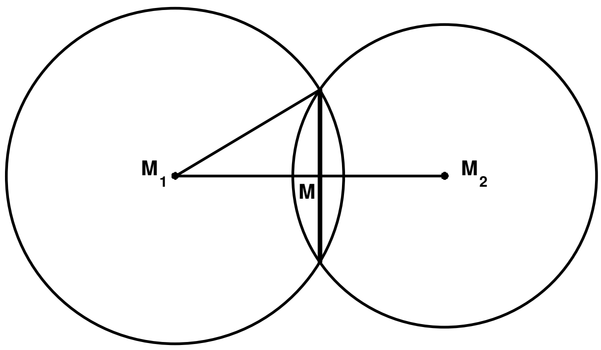
$(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7$

Koordinatenfporm der Ebene in welcher der Schnittkreis liegt :

$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Schnitt mit der Verbindungsgeraden (Zentrale) M_1M_2 ergibt als Mittelpunkt M des Schnitt-kreises

$M(\frac{1}{3} | -\frac{2}{3} | \frac{1}{3})$



$\overline{MM_1}^2 = (\frac{1}{3} - 1)^2 + (\frac{2}{3} - 0)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2 = \frac{12}{9}$

Pythagoras : $r = \sqrt{3^2 - \frac{12}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{69}$
