

Relative Häufigkeit und Normalverteilung

Ein Unternehmen liefert ein elektronisches Bauteile mit einer Ausschussquote von 10% d.h im Mittel ist jedes 10. Bauteil defekt.

- a) Auf Grund häufiger Reklamationen überprüft der Hersteller der Bauteile die Ausschussquote. Dazu werden 500 Bauteile geprüft.
- i) Wie groß ist die W'keit, dass die relative Häufigkeit unbrauchbarer Bauteile um höchstens 0,01 von der sich nicht geänderten Ausschussquote abweicht ?
- ii) In welchem möglichst kleinem Intervall symmetrisch zum Erwartungswert liegt die relative Häufigkeit mit mehr als 90% W'keit ?
- b) Wie viele Bauteile müsste die die Firma mindestens testen, damit die relative Häufigkeit defekter Bauteile mit mehr als 95% um höchstens 0,02 von der Ausschussquote abweicht ?
- c) Durch ein neues Produktionsverfahren soll die Ausschussquote gesenkt werden.

Wie viele Bauteile müsste die Firma mindestens testen, damit die relative Häufigkeit defekter Bauteile mit mehr als 95% W'keit höchstens 0,01 von der neuen, unbekanntes Ausschussquote abweicht ?

- d) Auf welchen Wert muss die Ausschussquote mindestens sinken, damit unter 1000 Bauteilen mit mehr als 95% W'keit mehr als 900 brauchbare Bauteile sind ?
-

Wiederholungsaufgaben

1. In einer Urne A sind 4 weiße und 6 schwarze Kugeln und in einer Urne B 6 weiße und 4 schwarze Kugeln. Die Urnen sind nicht unterscheidbar.

Man wählt eine Urne aus und zieht nacheinander 120 Kugeln mit Zurücklegen.

Wenn man weniger als 60 weiße Kugeln zieht, dann nimmt man an, dass man die Urne A gewählt hat. Ansonsten geht man davon aus, dass es sich um die Urne B handelt.

Mit welcher W'keit irrt man sich jeweils ?

2. 2000 Besucher wollen in ein Stadion. Aus Erfahrung weiß man, dass 10% der Besucher mit Schlagstöcken, Steinen usw. ausgerüstet sind.

Wie groß ist die Chance der Polizei bzw. der Ordner, bei zufälliger Durchsicherung von 200 Besuchern mindestens 15 und höchstens 25 Rowdies zu erwischen ?

(Berechne näherungsweise mit Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur!)

3. Bei einer Prüfung müssen die SchülerInnen 80 Fragen beantworten. Bei jeder Frage stehen 4 Antworten, wovon drei falsch und eine richtig ist.

Die SchülerInnen müssen jeweils die richtige Antwort ankreuzen.

Jemand besteht die Prüfung, wenn er mindestens 30 Fragen richtig beantwortet.

Wie groß ist die W'keit, dass jemand, der rein zufällig Antworten ankreuzt, den Test besteht ?

4. Eine Fluggesellschaft weiss aus Erfahrung, dass auf einer bestimmten Strecke jede 5. Reservierung annulliert wird. Das Flugzeug bietet 250 Gästen Platz.

Wieviele Reservierungen darf die Fluggesellschaft höchstens entgegennehmen, damit sie mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit sicher sein kann, keine Gäste, welche reserviert haben, abweisen zu müssen, weil alle Plätze schon besetzt sind ?

5. Ein Gärtner braucht im Frühling mindestens 200 Setzlinge. Aus Erfahrung weiß er, dass die W'keit, dass ein Same dieser Pflanzenart sprießt und zu einem gesunden Setzling wird, bei 50% liegt.

Wieviele Samen wird er stecken, damit er mit 95% W'keit sicher sein kann, im Frühling mindestens 200 Setzlinge zu haben ?

6. Eine echte Münze wird 600 mal geworfen. Wie groß ist die W'keit, dass die Anzahl der K-Würfe um mehr als 1 % vom Erwartungswert abweicht ?
-

7. Die Lebensdauer X (in km) eines Automotors einer bestimmten Marke sei normalverteilt. Die Automotoren haben eine mittlere Lebensdauer von 100 000 km mit einer Standardabweichung von 20 000 km.

a) Wieviel % der erzeugten Motoren haben eine Lebensdauer von mindestens 125 000 km ?

b) Bei wieviel % der Motoren weicht die Lebensdauer um mehr als 15 000 km vom Mittelwert ab?

8. Von den wahlberechtigten Bürgern eines Landes wollen 15% die Partei A wählen (sog. A-Wähler). In Unkenntnis dieser Tatsache beauftragt die Partei ein Meinungsforschungsinstitut 1200 Wähler zu befragen.

a) Bestimmen Sie die W'keit, dass weniger als 14% der befragten Personen A-Wähler sind.

b) Ermitteln Sie ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungswert, in dem mit mehr als 90% W'keit die Zahl der A-Wähler liegt.
Welches Intervall ergibt sich, wenn man die Abschätzung nach Tschebyschow verwendet ?

Die Partei verschärft ihren Wahlkampf, weil sie glaubt, damit ihren Stimmenanteil p zu vergrößern.

- c) Schätzen Sie ab, wie viele Personen man bei einer neuerlichen Umfrage mindesten befragen muss, damit mit mindestens 80% W'keit der Anteil der A-Wähler unter den befragten Personen um höchstens 0,01 von p abweicht.

10% der Wahlberechtigten sind Nichtwähler.

- d) Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens nach ihrem Wahlverhalten befragt werden müssen, damit mit mindestens 90% W'keit mehr als 50 Nichtwähler unter den befragten Personen sind.
-

Lösungen :

$$1. a) i) P(45 \leq X \leq 55) = \Phi\left(\frac{55 - 50 + 0,5}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi\left(\frac{45 - 50 + 0,5}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2 \cdot \Phi(0,82) - 1 \approx 64,2\%$$

$$ii) \text{ Ansatz : } I = [50 - k; 50 + k]$$

$$P(50 - k \leq X \leq 50 + k) > 0,90 \Leftrightarrow P(X_1 \leq 50 + k) - P(X_1 \leq 50 - k - 1) > 0,90$$

$$\Phi\left(\frac{k + 0,5}{\sqrt{45}}\right) - \Phi\left(\frac{-k - 0,5}{\sqrt{45}}\right) > 0,90 \Rightarrow \frac{k + 0,5}{\sqrt{45}} > 1,6449$$

$$\Rightarrow k = 11 \quad I = [0,078; 0,122]$$

$$I = [np - 0,02n; np + 0,02p]$$

$$b) 2 \cdot \Phi\left(\frac{0,02n + 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,09}}\right) - 1 > 0,95 \Rightarrow 0,02n - 0,588\sqrt{n} + 0,5 > 0 \Rightarrow n = 814$$

$$c) I = [np - 0,01n; np + 0,01p]$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{0,01n + 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,25}}\right) - 1 > 0,95 \Rightarrow 0,01n - 0,98\sqrt{n} + 0,5 > 0 \Rightarrow n = 9504$$

$$d) P(X > 900) > 0,95 \Rightarrow P(X \leq 900) < 0,05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{900 - 1000q + 0,5}{\sqrt{1000q \cdot (1 - q)}}\right) < 0,05$$

$$\frac{900 - 1000q + 0,5}{\sqrt{1000q \cdot (1 - q)}} < -1,6449 \quad p \leq 8,48\%$$

1. Annahme von A, obwohl B vorliegt : 1,0%

Annahme von B, obwohl A vorliegt : 1,7%

2. 80,7%

3. 2,95%

4. $P(X \leq 250) \geq 0,99$

5. $n = 293$

6. $n = 449$

7. 77,5%

8. a) 15,6% b) $I = [160; 200]$ bzw. $[140; 220]$ c) 12500 d) 599