

Aufgabenblatt 3 : Die Integralfunktion und der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

1. Bestimme den Term der Ableitung folgender Funktionen

a) $F : x \rightarrow \int_1^x (3t^2 - \frac{2}{t}) dt, D = \mathbb{R}^+$ b) $F : x \rightarrow \int_1^x (\cos^2 u - \sin u) du, D = \mathbb{R}$ c) $\int_0^x |t-1| dt, D = \mathbb{R}$

d) $F : x \rightarrow \int_x^{-1} 2^t dt, D = \mathbb{R}$ e) $F : x \rightarrow \int_1^{x^2} \sqrt{t^2+1} dt, D = \mathbb{R}$

2. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen. Begründen Sie ihr Vorgehen !

a) $\int_{\pi}^x \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) - \frac{\pi}{2}$ b) $\int_0^x \sin^n t dt = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int_0^x \sin^{n-2} t dt, n \geq 2$

c) $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} - 1)$ d) $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = -\int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ Deuten Sie den Sachverhalt geometrisch

3. a) Bestimmen Sie die Abszissen und die Art der Extremwerte von $F : x \rightarrow \int_1^x (t + \frac{2}{t} - 3) dt, D = \mathbb{R}^+$

b) Schreiben Sie die Funktion $f : x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 + x$ auf möglichst verschiedene Arten als Integralfunktion.

c) Warum lässt sich die Funktion $f : x \rightarrow x^2 + 1$ nicht als Integralfunktion darstellen ?

4. Das folgende Diagramm zeigt den Graphen einer auf ganz \mathbb{R} definierten abschnittsweise linearen Funktion f .

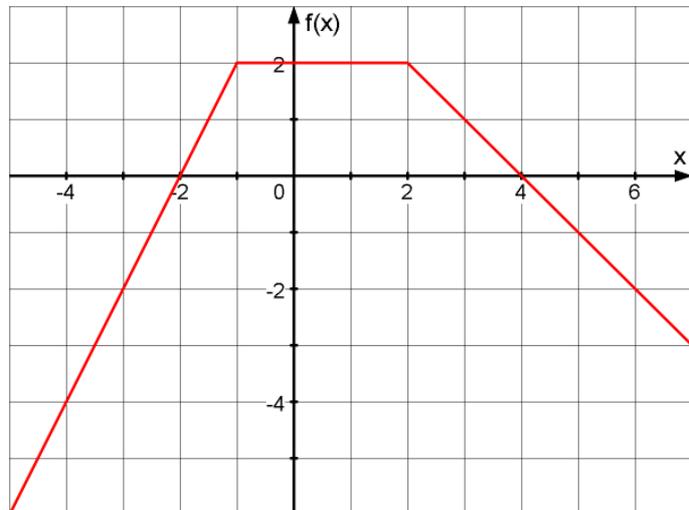
a) Ermitteln Sie mit Hilfe elementarer Betrachtungen für die Funktion

$$F : x \rightarrow \int_{-1}^x f(t) dt$$

die Nullstellen, das Monotonieverhalten, Art und Lage der Extrema sowie das Krümmungsverhalten

b) Betrachten Sie nun die Funktionenschar

$$F_a : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt.$$



Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl der Nullstellen einer Funktion der Schar.

5. Gegeben sind die Funktionen $f : x \rightarrow |x^2 - 4| - 4$ und $F : x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$

a) Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f und zeichnen Sie den Graphen von f

b) Ermitteln Sie ohne integralfreie Darstellung von F Monotonieverhalten, Abszissen und Art der Extrema sowie des Krümmungsverhalten des Graphen von F .

c) Bestimmen Sie jetzt die Ordinaten der Extrema ! Beachten Sie dazu die Symmetrie von F .