Was in Deutschland häufig vergessen wird :

Wer nicht arbeitetet, begeht auch keine Fehler !

Wenn man sich auf das Kritisieren der Zustände beschränkt, ändert man die Zustände nicht !

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

==

1. Der Schüler Pankraz kommt bei schlechtem Wetter immer zu spät in die Schule. Bei schönem Wetter kommt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% zu spät.

   Wie hoch darf die Schlechtwetterwahrscheinlichkeit höchstens sein, damit Pankraz mit mindestens 40%-iger Wahrscheinlichkeit pünktlich zu Unterrichtsbeginn erscheint ?

---

2. Es sei bekannt, dass von den Prüfungskandidaten A, B, C und D zwei bestanden haben. Die Vorkenntnisse der vier waren identisch, womit die Annahme gerechtfertigt erscheint, dass alle die gleiche Aussicht ($p = 0{,}6$) auf das Bestehen der Prüfung hatten.

   Geben Sie nun die Wahrscheinlichkeit für A an, bestanden zu haben, wenn

   a) sonst keine Informationen bekannt sind

   b) bekannt ist, dass C oder D bestanden haben

   c) bekannt ist, dass D bestanden hat.

---

3. Wie groß ist beim Werfen dreier regulärer Würfel die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl Sechs dabei ist, unter der Bedingung, dass die drei geworfenen Augenzahlen alle voneinander verschieden sind ?

---

4. Bei einer Prüfung haben 60% der Prüflinge Mathematik und Chemie, 75% Chemie, und 80% Mathematik bestanden. Einer der Prüflinge wird zufällig ausgewählt.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in

   a) Mathematik durchfiel, wenn man weiß, dass er Chemie nicht bestanden hat ?

   b) Chemie durchfiel, wenn man weiß, dass er Mathematik nicht bestanden hat ?

   c) Mathematik oder Chemie durchfiel ?

---

5. Die Wahrscheinlichkeiten für das Treffen der Zielscheibe bei jedem Schuss betragen für drei Schützen $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ und $p_3 = \frac{2}{3}$. Bei gleichzeitiger Schussabgabe aller drei Schützen gab es zwei Treffer.

   Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der dritte Schütze vorbeigeschossen hat.

---

6. Drei Ärzte diagnostizieren in 70, 80 bzw. 85 von 100 Fällen die vorliegende Erkrankung eines Patienten richtig. Unabhängig voneinander untersuchen die 3 Ärzte einen Patienten.

   Mit welcher W'keit treffen alle 3 (genau einer, genau 2) der Ärzte die richtige Diagnose ?

---

7. Von 60 befragten Personen gaben 20 an, dass sie Nichttrinker sind und 40, dass sie rauchen. Bei den Trinkern gibt es 10 Nichtraucher.

   a) Wieviel Prozent der Raucher trinken ?

   b) Wieviel Prozent der Trinker sind Nichtraucher ?

   c) Jemand gibt bei einer Gesundheitsuntersuchung an, dass er Raucher ist.

      Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es auch ein Trinker ?

   d) Besteht ein Zusammenhang zwischen den Merkmalen "Rauchen (Ja/Nein)" und "Trinken(Ja/Nein)" ?

Lösungen :

---

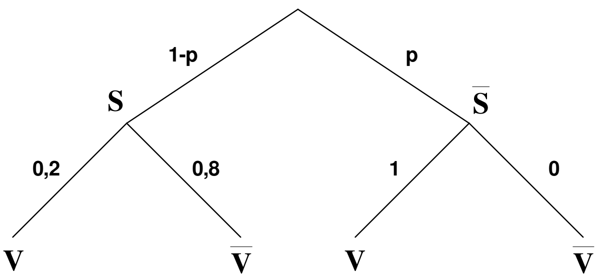
1. S : Es ist schönes Wetter

V : Der Schüler Pankraz kommt zu spät in die Schule

Gegeben : $P(V|S) = 0{,}2 \quad P(V|\overline{S}) = 1$

Bedingung : $P(\overline{V}) \geq 0{,}40 \quad \Leftrightarrow \quad P(V) \leq 0{,}6$

Sei $P(\overline{S}) = p$



$$P(V) = p\cdot 1 + 0{,}2\cdot(1-p) \leq 0{,}60 \Leftrightarrow 0{,}8p \leq 0{,}40 \Leftrightarrow p \leq 0{,}5$$

---

2. E : Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei die Prüfung bestanden haben

$$P(E) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Auswahl der Pfadstrecken}} \cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456 = 34{,}56\%$$

a) A : Der Kandidat A hat bestanden

B : Der Kandidat B hat bestanden

C : Der Kandidat C hat bestanden

D : Der Kandidat D hat bestanden

a) $P(A \cap E) = 0{,}6\cdot\binom{3}{1}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^2 = 0{,}1728 = 17{,}28\% \qquad P(A|E) = 0{,}5 = 50\%$

b) $$P[A \cap (C \cup D)] = \underbrace{0{,}6^2\cdot 0{,}4^2}_{\text{A und C bestanden}} + \underbrace{0{,}6^2\cdot 0{,}4^2}_{\text{A und D bestanden}} = 0{,}1152 = 11{,}52\%$$

$P(A|C \cap D) = 0{,}\overline{3} = 33\frac{1}{3}\%$

c) $P(A \cap D) = 0{,}6^2\cdot 0{,}4^2 = 0{,}0576 = 5{,}76\% \qquad P(A|D) = 0{,}1\overline{6} = 16\frac{2}{3}\%$

---

3. V : Alle Augenzahlen verschieden

S : Die Augenzahl Sechs ist dabei

$$P(V) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{5}{9} \quad P(S \cap V) = \frac{\binom{3}{1} \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{5}{18} \quad P(S|V) = \frac{1}{2}$$

---

4. Vierfeldertafel :

M : Mathematik bestanden

C : Chemie bestanden

Chemie/ Mathematik	bestanden	nicht bestanden	
bestanden	**0,60**	0,15	**0,75**
nicht bestanden	0,20	0,05	0,25
	0,80	0,20	1

a) $P(\overline{M} \mid \overline{C}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0{,}05}{0{,}25} = 20\%$

b) $P(\overline{C} \mid \overline{M}) = \dfrac{P(\overline{C} \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0{,}05}{0{,}20} = 25\%$

c) $P(\overline{M} \cup \overline{C}) = 40\%$

---

5. E : Die Schützen erzielen drei Treffer

V_3 : Der dritte Schütze schießt vorbei

$$P(V_3 | E) = \frac{P(E \cap V_3)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{6}{13}$$

---

6. E_i : Die Diagnose von genau i $(1 \leq i \leq 3)$ Ärzten ist richtig.

$P(E_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 \quad P(E_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15$

$P(E_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15$

---

7. R : Die befragte Person raucht

T : Die befragte Person trinkt

	Trinker	Nichtrinker	
Raucher	30	10	**40**
Nichtraucher	**10**	10	20
	40	**20**	60

a) $\frac{30}{40} = 75\%$ b) $\frac{10}{40} = 25\%$ c) $P(T\,|\,R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 75\%$

d) Die Antwort lautet "Ja".

Begründung :

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den befragten Personen jemand trinkt, ist $\frac{2}{3}$.

Die Wahrschlichkeit, dass ein Raucher trinkt, ist dagegen $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit - Satz von Bayes

===

1. Maschine A und Maschine B produzieren elektronische Bauteile. Bei A sind 3 % der Bauteile fehlerhaft; bei B sind es 5 %. A produziert 65 % der Gesamtproduktion, B den Rest.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig kontrolliertes Bauteil der Gesamtproduktion fehlerhaft ist ?

   b) Man hat ein defektes Bauteil gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es von Maschine B hergestellt ?

----

2. In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut. Bei Einbruch gibt sie Alarm mit der Wahrscheinlichkeit 0,99. Wenn in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, gibt sie mit der Wahrscheinlichkeit 0,005 falschen Alarm.

   Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht sei 0,001.

   Die Anlage hat gerade Alarm gegeben.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbruch im Gang ist ?

----

3. Ein Forscher hat einen Test entwickelt, welcher positiv auf die Krankheit K reagiert. Hat eine Person die Krankheit K und macht den Test, dann ist das Ergebnis mit 95 % Wahrscheinlichkeit positiv. Gesunde Personen, welche den Test machen, erhalten mit 90 % Wahrscheinlichkeit ein negatives Ergebnis.

   0,5% der Bevölkerung haben die Krankheit K.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person krank ist, wenn der Test "positiv" anzeigt ?

----

4. Von einem Krebstest weiss man: Wenn jemand Krebs hat, dann ist das Ergebnis des Testes mit 96%iger Sicherheit positiv. Bei einer Person, welche keinen Krebs hat, ist das Ergebnis mit 96%iger Sicherheit negativ. Herr Y, 65-jährig, macht den Test. Das Resultat ist negativ.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Y trotzdem Krebs hat, wenn 0,7% aller 65-jährigen Krebs haben, ohne es zu wissen.

----

5. Gegeben : Test, welcher auf die Krankheit K reagiert.

   Man weiß: 1 % der Bevölkerung leidet unter dieser Krankheit K.

   Hat eine Person die Krankheit K und macht den Test, dann ist das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% positiv. Gesunde Personen, welche den Test machen, erhalten mit 90%iger Wahrscheinlichkeit ein negatives Ergebnis.

   Man macht von jeder Person zweimal den gleichen Test.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person krank ist, wenn einer der beiden Tests "positiv" anzeigt ?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person krank ist, wenn beide Tests "positiv" anzeigen ?

---

6. Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter/innen, die telefonische Anfragen von Kund/inn/en beantworten sollen. Frau A kann 95% aller Fragen zur Zufriedenheit der Kund/inn/en beantworten, Herr B 90% und Herr C gerade noch 70%.

   Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und errechnen Sie alle Pfadwahrscheinlichkeiten.

   Berechnen Sie unter der Annahme, dass alle drei Mitarbeiter/innen gleich viele Telefonate beantworten, die Wahrscheinlichkeiten, dass

   a) ein Kunde/eine Kundin mit der Antwort, die er/sie erhält, nicht zufrieden ist,

   b) ein unzufriedener Kunde/eine unzufriedene Kundin an Herrn B geraten ist,

   c) eine Antwort, die zur Zufriedenheit des Kunden/der Kundin ausfiel, von Herrn C gegeben wurde,

   d) ein Kunde/eine Kundin an Frau A gerät und eine zufriedenstellende Antwort bekommt.

---

7. 7% der Produktion eines Artikels besitzen den Fehler F_1, 5% besitzen den Fehler F_2 und 90% der Produktion sind fehlerfrei.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gesamtproduktion zufällig ausgewählter Artikel beide Fehler besitzt ?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Artikel

      i) der den Fehler F_1 besitzt, auch den Fehler F_2 besitzt ?

      ii) der nicht fehlerfrei ist, beide Fehler aufweist ?

      iii) der den Fehler F_1 nicht hat, den Fehler F_2 besitzt ?

      iv) der den Fehler F_1 besitzt, den Fehler F_2 nicht besitzt ?

---

8. Eine Schule nimmt alle angemeldeten Schüler auf. Im ersten Schuljahr machen alle einen Eignungstest, welcher für die Schüler ohne Konsequenzen bleibt. 40% der Schüler erreichen das Schulziel nicht.

   Die Schulleitung stellt fest, dass 90% von diesen und 1% der erfolgreichen Schüler den Eignungstest nicht bestanden haben.

   Schüler A macht denselben Eignungstest und fällt durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er trotzdem die Schule erfolgreich abschließt ?

---

9. Gegeben: Kiste mit Spielwürfeln. 50 % dieser Würfel sind normal. Die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl ist gleich groß. Beim Rest ist die Wahrscheinlichkeit, eine "6" zu würfeln, 1/3.

   Man möchte mit dem folgenden Test die normalen Würfel aussortieren.

   Jeder Würfel wird dreimal geworfen. Kommt keine "6", dann soll er als normal gelten und er wird in die Kiste mit der Aufschrift "normale Würfel" gelegt. Bei mindestens einer "6" kommt der Würfel in eine andere Kiste.

   Wieviel Prozent der Würfel in der Kiste "normale Würfel" sind normal ?

---

10. Gegeben sind drei Teiche l, 2, und 3, die l, 2, bzw. 3 Fische enthalten. Ein Teich wird zufällig ausgewählt und im Teich wird ein Fisch gefangen, markiert und wieder freigegeben. Am nächsten Tag wird in demselben Teich wieder ein Fisch gefangen, der markiert ist.

    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Teich l, 2 bzw. 3 Fische enthält ?

---

11. In einer Tasche sind 9 gute Münzen und eine Münze, die auf beiden Seiten Zahl hat.

    Jemand zieht eine Münze und wirft sie l, 2, 3, 4, 5 mal. Das Ergebnis

    Z (nach 1 Wurf), ZZ (nach 2 Würfen), ZZZ (nach 3 Würfen), ZZZZ (nach 4 Würfen), ZZZZW (nach 5 Würfen) wird ihm mitgeteilt.

    Wie groß ist jeweils die die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Münze gut ist ?

---

12. Bei der Übertragung der Zeichen "·" und " – " in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel 4% der gesendeten Punkte als Striche und 3% der gesendeten Striche als Punkte empfangen. Das Verhältnis gesendeter Punkte zu gesendeten Strichen ist 3 : 5.

    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das richtige Zeichen empfangen wurde, falls

    a) "·""   b) " – "

    empfangen wurde ?

---

13. Schachtel A enthält 9 Zettel mit den Zahlen 1 bis 9, Schachtel B enthält 5 Zettel mit den Zahlen 1 bis 5. Aus einer zufällig ausgewählten Schachtel wird (zufällig) ein Zettel gezogen.

    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zettel aus Schachtel A gezogen wurde, wenn die Zahl darauf gerade ist ?

---

14. In einer Gemäldegalerie hängen 12 Bilder, wovon 2 eine Fälschung sind. Lediglich ein Experte kann ein Original von einer Fälschung unterscheiden, wobei auch er in 10% aller Fälle irrt, unabhängig davon, ob es sich um ein Original oder eine Fälschung handelt. Ede, eine bekannter Kunstdieb, stiehlt ein zufällig ausgewähltes Bild aus der Galerie und konsultiert anschließend den Experten.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Bild echt, wenn es der Experte dafür hält ?

b) Der Experte halte das gestohlene Bild für eine Fälschung, worauf Ede noch einmal in die Galerie einbricht und ein weiteres Bild stiehlt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er unter dieser Bedingung diesmal tatsächlich ein Original ?

---

15. Max hat drei Stammkneipen. Einmal pro Woche geht er in den "Kühlen Grund", zweimal in die "Sorgenpause" und dreimal in den "Schluckspecht".

Die Wahrscheinlichkeit, dass er jeweils dort seinen Freund Moritz trifft, beträgt im "Kühlen Grund" 0,5, in der "Sorgenpause" 1/6 und im "Schluckspecht" 1/3.

Max kommt abends nach Hause und erzählt seiner Frau, er habe eben in der Kneipe Moritz getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er in der "Sorgenpause" ?

---

16. Eine Firma stellt Computerteile her. Diese müssen ohne Ausnahme einen Test bestehen. Nur wenn sie den Test bestanden haben, werden sie an die Kunden ausgeliefert. Wenn das Produkt einen Herstellungsfehler hat, dann fällt es beim Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% durch. Wenn es keine Produktionsfehler hat, dann besteht es den Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 98%.

Wieviele % der Gesamtproduktion dürfen höchstens fehlerhaft sein, damit nicht mehr als 0,1 % defekte Produkte an die Kunden ausgeliefert werden ?

---

17. Drei Kästen sind mit jeweils zwei Münzen gefüllt, einer mit zwei goldenen, einer mit zwei silbernen und einer mit einer goldenen und einer silbernen. Ein Kasten wird zufällig ausgewählt und es wird ihm blind eine Münze entnommen.

Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die im gewählten Kasten verbleibende Münze aus Gold ist, unter der Bedingung, dass die entnommene Münze ebenfalls eine goldene war ?

---

18. Schlagzeile :

"Vier von zehn tödlich verunglückten Autofahrern trugen keinen Sicherheitsgurt !"

Schlussfolgerung:

Sicherheitsgurten sind gefährlich, denn von zehn verunglückten Autofahrern sterben 6 mit Gurten, vier ohne.

Schlagzeile :

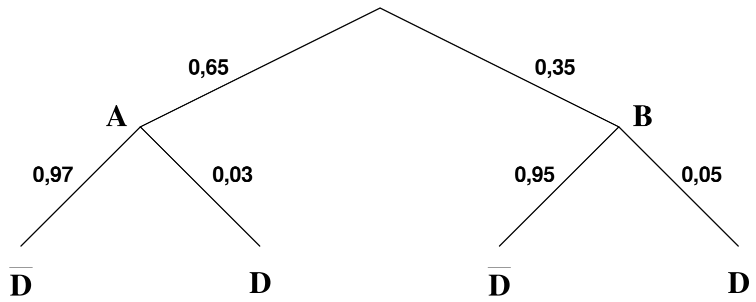
Mehr als die Hälfte aller Autounfälle geschehen in einem Radius von dreißig Kilometern um den Wohnort eines Beteiligten. Schlussfolgerung: Man fährt in der Nähe der eigenen Wohnung besonders unvorsichtig.

Kommentieren Sie aus mathematischer Sicht Schlagzeilen und Schlussfolgerungen !

Lösungen :

===

1. Baumdiagramm



Definiere die Ereignisse

A : Elektronisches Teil stammt von A

B : Elektronisches Teil stammt von B

D : Elektronisches Teil ist defekt

Gegeben : $P(A) = 0{,}65 \quad P(B) = 0{,}35 \quad P(D|A) = 0{,}03 \quad P(D|B) = 0{,}05$

a) $P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) = 0{,}65 \cdot 0{,}03 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 = 3{,}7\%$

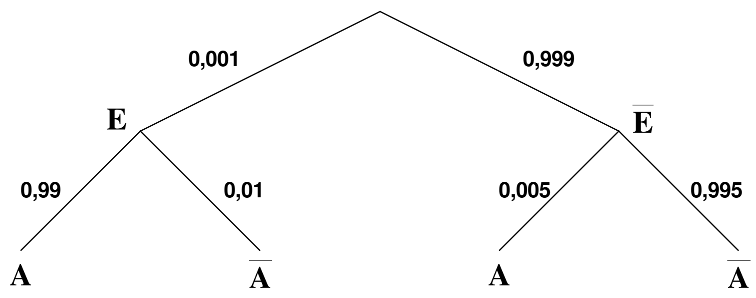
b) $P(B|D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}037} = \dfrac{35}{74}$

----

2. Definiere Ereignisse

E : Einbruch   A : Alarm

Baumdiagramm :



Gegeben : $P(E) = 0{,}001 \quad P(A|E) = 0{,}99 \quad P(A|\overline{E}) = 0{,}005$

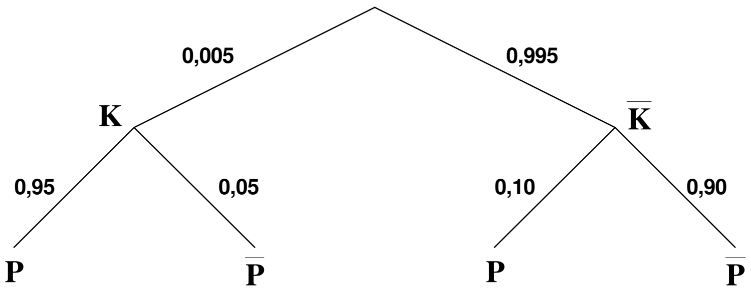
Gesucht : $P(E|A)$

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E) \cdot P(A|E)}{P(E) \cdot P(A|E) + P(\overline{E}) \cdot P(A|\overline{E})} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}99}{0{,}001 \cdot 0{,}99 + 0{,}999 \cdot 0{,}005} \approx 16{,}5\%$$

----

3. K : Eine Person hat die Krankheit

P : Der Test fällt postiv aus



Gegeben : $P(K) = 0{,}5\%$ $\quad P(P|K) = 0{,}95$ $\quad P(\overline{P}|\overline{K}) = 0{,}90$

Gesucht : $P(K|P)$

$$P(K|P) = \frac{P(K \cap P)}{P(P)} = \frac{P(K)\cdot P(P|K)}{P(K)\cdot P(P|K) + P(\overline{K})\cdot P(P|\overline{K})} = \frac{0{,}005\cdot 0{,}95}{0{,}005\cdot 0{,}95 + 0{,}995\cdot 0{,}10} \approx 4{,}6\%$$

---

4. K : Person hat Krebs

P : Test fällt positiv aus

Gegeben : $P(K) = 0{,}007$ $\quad P(P|K) = 0{,}96$ $\quad P(\overline{P}|\overline{K}) = 0{,}96$

Gesucht : $P(K|\overline{P})$

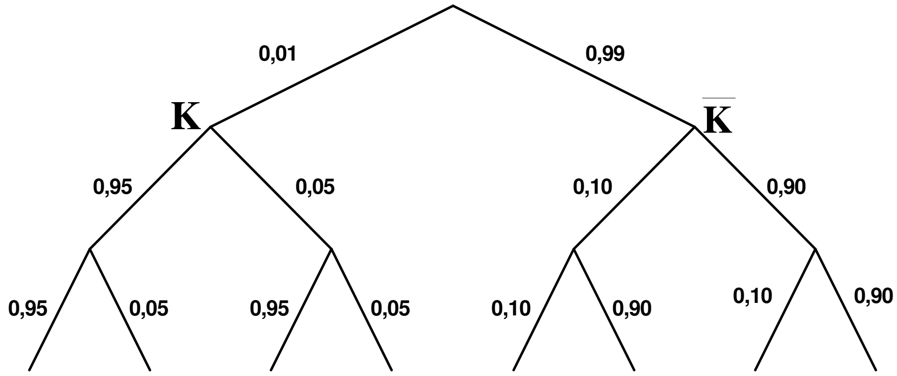
$$P(K|\overline{P}) = \frac{P(K \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{0{,}007\cdot 0{,}04}{0{,}007\cdot 0{,}04 + 0{,}993\cdot 0{,}96} \approx 0{,}029\%$$

---

5. K : Die Person leidet an der Krankheit

P_1 : Erster Test fällt positiv aus $\quad P_2$: Zweiter Test fällt positiv aus

Gegeben : $P(K) = 0{,}01$ $\quad P(P_i|K) = 0{,}95$ $\quad P(\overline{P_i}|\overline{K}) = 0{,}90$



a) Gesucht : $P\left[K \mid (P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)\right]$

$$P\left[K \mid (P_1 \cap \overline{P_2}) \cup (\overline{P_1} \cap P_2)\right] = \frac{2 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}{2 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}90} \approx 0{,}53\%$$

b) Gesucht : $P(K \mid P_1 \cap P_2)$

$$P(K \mid (P_1 \cap P_2) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95}{0{,}01 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}10} \approx 47{,}7\%$$

---

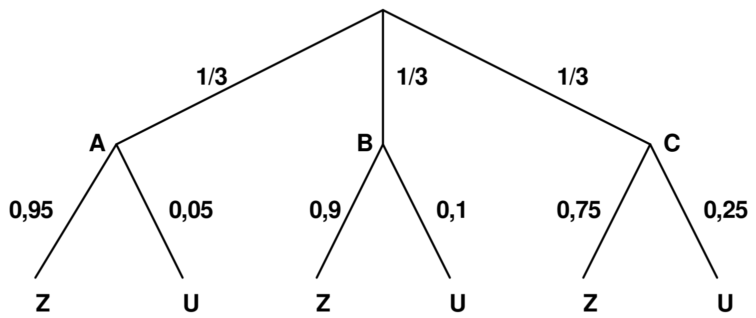
6. A : Frau A gibt Auskunft

B : Herr B gibt Auskunft

C : Herr C gibt Auskunft

Z : Die Antwort ist zufriedenstellend

U : Die Anwort ist unzufriedenstellend



a) $P(U) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 = \frac{3}{20}$

b) $P(B \mid U) = \frac{P(B \cap U)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{2}{9}$

c) $P(C \mid Z) = \frac{P(C \cap z)}{P(Z)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{17}{20}} = \frac{14}{51}$

d) $P(A \cap Z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{60}$

---

7. Vierfeldertafel

	F_1	$\overline{F_1}$

F_2	0,02	0,03	**0,05**
$\overline{F_2}$	0,05	**0,90**	0,95
	0,07	0,93	1

a) $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}02$

b) i) $P(F_2 | F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_1)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}07} = \dfrac{2}{7} \approx 28{,}6\%$

ii) $P(F_1 \cap F_2 | F) = \dfrac{0{,}02}{0{,}10} = \dfrac{1}{5} \approx 20\%$

iii) $P(F_2 | \overline{F_1}) = \dfrac{P(\overline{F_1} \cap F_2)}{P(F_1)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}07} = \dfrac{3}{7} \approx 42{,}9\%$

iv) $P(\overline{F_2} | F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap \overline{F_2})}{P(F_1)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}07} = \dfrac{5}{7} \approx 71{,}4\%$

---

8. T : Test bestanden

Z : Schulziel erreicht

	Z	$\overline{Z}$	
T	0,594	0,04	0,634
$\overline{T}$	$0{,}01 \cdot 0{,}6 = 0{,}006$	$0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}36$	0,366
	0,6	0,4	1

Gegeben : $P(\overline{Z}) = 0{,}40 \quad P(\overline{T} | \overline{Z}) = 0{,}9 \quad P(\overline{T} | Z) = 0{,}01$

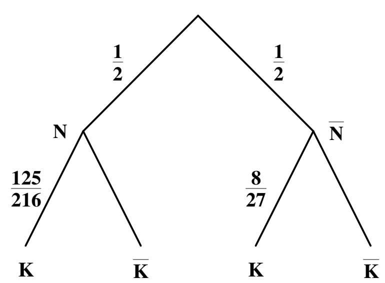
Gesucht : $P(Z | \overline{T})$

$$P(Z | \overline{T}) = \frac{P(Z \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(Z) \cdot P(\overline{T} | Z)}{P(Z) \cdot P(\overline{T} | Z) + P(\overline{Z}) \cdot P(\overline{T} | \overline{Z})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}01}{0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}9} \approx 1{,}6\%$$

---

9. N : Würfel ist normal

K : Würfel kommt in die Kiste für normale Würfel



Gegeben : $P(N) = P(\overline{N}) = \frac{1}{2}$

Gesucht : $P(N \mid K)$

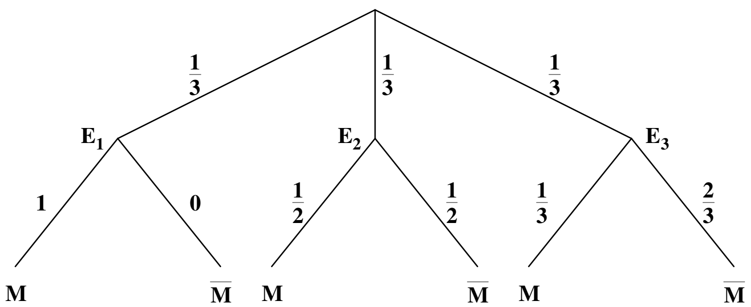
$P(K \mid N) = \frac{125}{216} \quad P(K \mid \overline{N}) = \frac{8}{27}$

$$P(N \mid K) = \frac{P(N \cap K)}{P(K)} = \frac{P(N) \cdot P(K \mid N)}{P(N) \cdot P(K \mid N) + P(\overline{N}) \cdot P(K \mid \overline{N})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{215}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{215} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27}} = \frac{125}{189} \approx 66{,}1\%$$

---

10. M : Der gefangene Fisch ist markiert

E_i : Der Teich enthält i, i = 1, 2, 3, Fische.



$P(M) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$

$P(E_1 \mid M) = \frac{P(E_1 \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{11}{18}} = \frac{6}{11}$

$P(E_2 \mid M) = \frac{P(E_1 \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{18}} = \frac{3}{11}$

$P(E_3 \mid M) = \frac{P(E_3 \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{18}} = \frac{2}{11}$

---

11. G : Münze ist gut

E_i : Münze wird i-mal geworfen mit dem angegebenen Ergebnis $(1 \le i \le 5)$

$P(G \mid E_1) = \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}9 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}1 \cdot 1} \approx 81{,}8\%$

$$P(G \mid E_2) = \frac{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot 1} \approx 69{,}2\%$$

$$P(G \mid E_3) = \frac{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot 1} \approx 52{,}9\%$$

$$P(G \mid E_4) = \frac{0{,}9\cdot 0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot 1} = 36\%$$

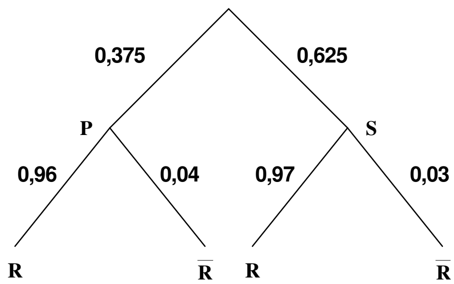
$$P(G \mid E_5) = \frac{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot 0} = 100\%$$

---

12. P : Punkt wird abgesendet

S : Strich wird abgesendet

R : Signal wird richtig



E : Punkt wird empfangen

$$P(E) = \frac{3}{8}\cdot\frac{96}{100}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{100} = \frac{303}{800}$$

$$P(P|E) = \frac{P(P\cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot 0{,}96}{\frac{303}{800}} = \frac{288}{303}$$

F : Strich wird empfangen

$$P(F) = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{100}+\frac{5}{8}\cdot\frac{97}{100} = \frac{497}{800}$$

$$P(P|F) = \frac{P(P\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot 0{,}97}{\frac{497}{800}} = \frac{485}{497}$$

---

13. A : Es wird aus A gezogen

G : Es wird eine gerade Zahl gezogen

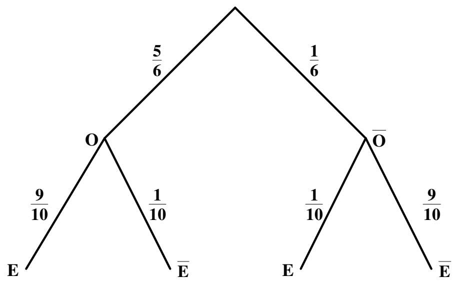
$$P(A\,|\,G) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{1}{5}} = \frac{10}{19} \approx 52{,}6\%$$

---

14. E : Der Experte hält das Bild für echt

O : Das Bild ist ein Original

Gegeben : $P(\overline{O}|E) = 0{,}1 \quad P(O|\overline{E}) = 0{,}1$



$$P(O|\,E) = \frac{P(O \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{30}} = \frac{45}{46}$$

Zwei Fälle können eintreten :

i) Ede hat bereits beim ersten Mal, trotz der gegenteiligen Meinung des Experten, ein Original geklaut.

ii) Ede hat wirklich, wie vom Experten behauptet, ein Original gestohlen.

$$P(B) = \frac{10}{11}\cdot P(\overline{O}\,|\,\overline{E}) + \frac{9}{11}\cdot P(O\,|\,\overline{E}) = \frac{10}{11}\cdot\frac{\frac{9}{60}}{\frac{7}{30}} + \frac{9}{11}\cdot\frac{\frac{5}{60}}{\frac{7}{30}} = \frac{10}{11}\cdot\frac{9}{14} + \frac{9}{11}\cdot\frac{5}{14} = \frac{135}{154}$$

---

15. G : Max geht in den "Kühlen Grund"

P : Max geht in die "Sorgenpause"

S : Max geht in den Schluckspecht

M : Max tifft Moritz

$$P(P\,|\,M) = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{11}$$

---

16. T : Das Produkt besteht den Test

F : Das Produkt ist fehlerhaft

Gegeben : $P(\overline{T} \mid F) = 0{,}99 \quad P(T \mid \overline{F}) = 0{,}98$

Gesucht : Maximaler Anteil p_{max} defekter Geräte, damit $P(F \mid T) \leq 0{,}001$

Also $P(F \mid T) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(F)\cdot P(T \mid F)}{P(F)\cdot P(T \mid F) + P(\overline{F})\cdot P(T \mid \overline{F})} \leq 0{,}001$

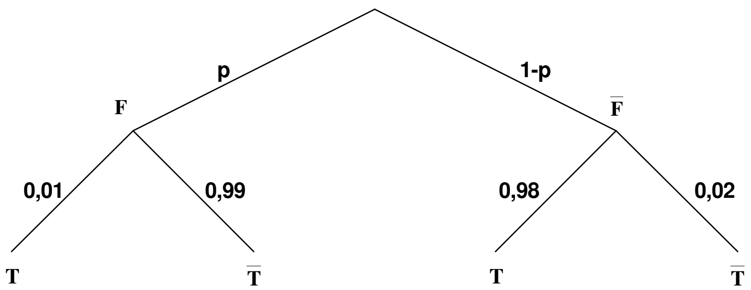
Eingesetzt : $\dfrac{p_{max}\cdot 0{,}01}{p_{max}\cdot 0{,}01 + (1 - p_{max})\cdot 0{,}98} \leq 0{,}001 \Rightarrow p_{max} \leq 8{,}94\%$

---

16. T : Das Produkt besteht den Test

F : Das Produkt ist fehlerhaft

Gegeben : $P(\overline{T} \mid F) = 0{,}99 \quad P(T \mid \overline{F}) = 0{,}98$



Gesucht : Maximaler Anteil p_{max} defekter Geräte, damit $P(F \mid T) \leq 0{,}001$

Also $P(F \mid T) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(F)\cdot P(T \mid F)}{P(F)\cdot P(T \mid F) + P(\overline{F})\cdot P(T \mid \overline{F})} \leq 0{,}001$

Eingesetzt : $\dfrac{p_{max}\cdot 0{,}01}{p_{max}\cdot 0{,}01 + (1 - p_{max})\cdot 0{,}98} \leq 0{,}001 \Rightarrow p_{max} \leq 8{,}94\%$

---

17. G_1 : Die erste entnommene Münze ist golden

G_2 : Die zweite Münze ist golden

$P(G_2 \mid G_1) = \dfrac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \dfrac{2}{3}$
