

Übungsblatt zur Klausur

=====
Für die Fehler in der Angabe - Aufgabe 1.b) und Aufgabe 2. -bitte ich um Entschuldigung.

1. Berechne

a) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx$ c) $\int \sin(2x + \pi) dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ e) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x} dx$ f) $\int_{-1}^2 \frac{x-3}{x^2-9} dx$

2. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

- a) Bestimme die Nullstellen von f sowie Art und Lage der Extrema von f .
- b) Bestimme den Wendepunkt von f und untersuche das Krümmungsverhalten von f .
- c) Die Wendetangente, der Graph G von f und die y -Achse schließen eine Fläche ein.

Berechne ihren Inhalt.

- d) Bestimme das Verhältnis, in dem die Parabel durch die beiden Extrempunkte von G das Flächenstück teilt, das G mit der x -Achse einschließt.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a : x \rightarrow \frac{1}{a^2+1} \cdot x^2 - x$ mit $a > 0$.

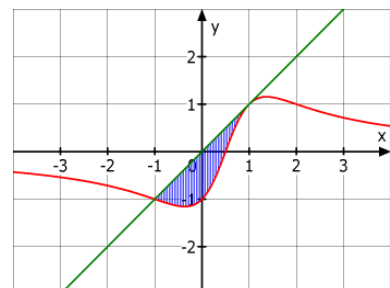
- a) Berechne in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, den ein Schargraph mit der x -Achse einschließt.
- b) Gibt es eine Fläche extremalen Inhalts?

4. Gegeben $f : x \rightarrow e^{x-2} - 1$.

Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , die x -Achse und die Tangente im Punkt $P(3 | y_P)$ einschließt.

5. Das Bild zeigt den Graphen von $f : x \rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

Bestimme den Inhalt den der Graph mit der Tangente im Punkt $P(1 | 1)$ einschließt.



Lösungen

$$a) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$b) \int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} dx = \frac{1}{a} \ln(e^{ax}+1) + C$$

$$c) \int \sin(2x+\pi) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+\pi)$$

$$d) \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 + C$$

$$e) \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+2x| \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \ln 8 - \frac{1}{2} \cdot \ln 3 = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{8}{3} + C$$

$$f) \int_{-1}^2 \frac{x-3}{x^2-9} dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{x+3} dx = \left[\ln|x+3| \right]_{-1}^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$$

2.

$$a) \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$f'(x) = 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

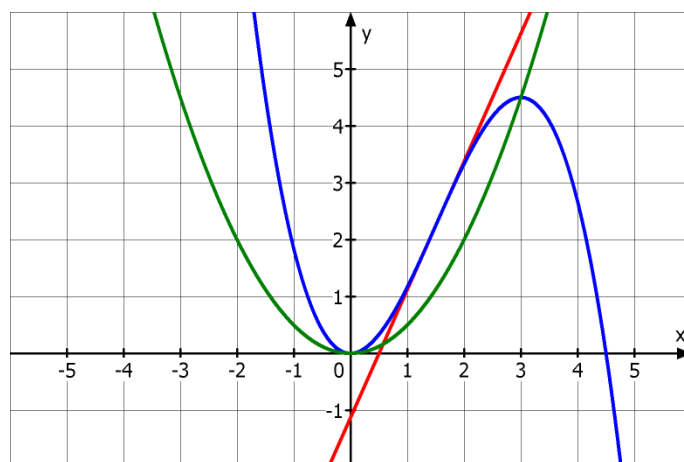
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
x	-	+	+
$3-x$	+	+	-
$f'(x) = x \cdot (3-x)$	-	+	-

$T(0|0)$ ist ein Tiefpunkt und $H(3|4,5)$ ist Hochpunkt.

$$b) f''(x) = 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	+	-
	LK	RK

$W\left(\frac{3}{2} \mid \frac{9}{4}\right)$ ist Wendpunkt des Graphen von f .



c) $f'(1,5) = 2,25 = \frac{9}{4}$ und damit ist $y = \frac{9}{4} \cdot (x - \frac{3}{2}) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}x - \frac{9}{8}$

Die gesuchte Fläche hat also den Inhalt

$$\int_0^{1,5} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8})dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}x \right]_0^{1,5} = \frac{27}{64}$$

d) Ansatz für die Parabel : $y = a \cdot x^2$

Der Punkt $H(3 \mid 4,5)$ eingesetzt: $4,5 = a \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Fläche zwischen dem Graphen von f und der Parabel:

$$A_1 = \int_0^3 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx = \int_0^3 (x^2 - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse:

$$\int_0^{4,5} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right]_0^{4,5} = \frac{729}{64} = 11 \frac{25}{64}$$

Teilverhältnis: $\frac{\frac{9}{4}}{11 \frac{25}{64} - \frac{9}{4}} = \frac{16}{65}$

3. a) Nullstellen von f :

$$\frac{1}{a^2+1} \cdot x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left[\frac{1}{a^2+1} \cdot x - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = a^2 + 1$$

$$\int_0^{a^2+1} \left(\frac{1}{a^2+1} \cdot x^2 - x \right) dx = \left[\frac{1}{a^2+1} \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{a^2+1} = \frac{1}{3} (a^2+1)^2 - \frac{1}{2} (a^2+1)^2 =$$

$$= -\frac{1}{6} (a^2+1)^2$$

$$A(a) = \frac{1}{6} (a^2+1)^2$$

b) $A'(a) = 2 \cdot (a^2+1) \cdot 2a > 0$ für $a > 0$ und damit gibt es keine Fläche extremalen Inhalts.

4.

$$f(3) = e^{3-2} - 1 = e - 1$$

$$f'(x) = e^{x-2} \text{ und damit } f'(3) = e^{3-2} = e$$

$$\text{Gleichung der Tangente: } y = e \cdot (x-3) + e - 1 = e \cdot x - 2e - 1$$

$$\text{Schnittpunkt mit der x-Achse: } e \cdot x - 2e - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2e-1}{e} \text{ und damit } S \left(\frac{2e-1}{e} \mid 0 \right)$$

Flächeninhalt des Steigungsdreiecks SPP':

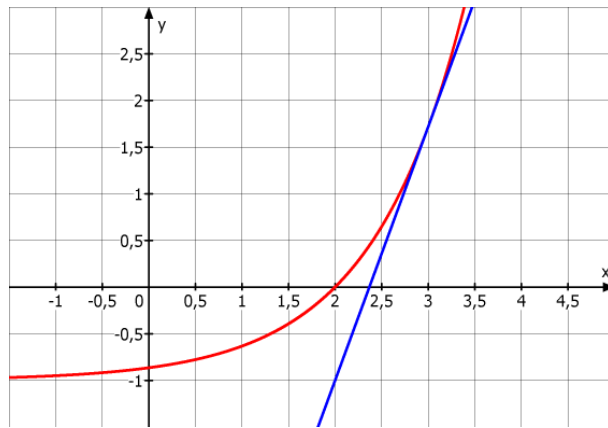
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left[3 - \frac{2e-1}{e} \right] \cdot (e-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e-1}{e} \cdot (e-1) = \frac{(e-1)^2}{2e}$$

$$\text{Nullstelle von } f: e^{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f mit den Geraden $x = 2$ und $x = 3$ einschließt

$$A_1 = \int_2^3 (e^{x-2} - 1) dx = \left[e^{x-2} - x \right]_2^3 = (e-3) - (1-2) = e-2$$

$$A = A_1 - A_{\Delta} = e-2 - \frac{(e-1)^2}{2e} = \frac{2e^2 - 4e - e^2 + 2e - 1}{2e} = \frac{e^2 - 2e - 1}{e} \approx 0,175$$



$$5. f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - x + 1) - (2x - 1) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(1) = 1$$

Gleichung der Tangente: $y = 1 \cdot (x - 1) + 1 = x$

$f(-1) = -1$ d.h. $Q(-1 | -1)$ ist der zweite Schnittpunkt der Tangente mit dem Graphen von f .

$$\int_{-1}^1 \left(x - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2-x+1) \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2} - \ln 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \ln 3 \right) = \ln 3$$