Übungsblatt zur Klausur

==

1. Berechne

a) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx$ c) $\int \sin(2x+\pi)dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ e) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x}dx$ f) $\int_{-1}^2 \frac{x-3}{x^2-9}dx$

---

2. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

a) Bestimme die Nullstellen von f sowie Art und Lage der Extrema von f.

b) Bestimme den Wendepunkt von f und untersuche das Krümmungsverhalten von f.

c) Die Wendetangente, der Graph G von f und die y-Achse schließen eine Fläche ein.

Berechne ihren Inhalt.

d) Bestimme das Verhältnis, in dem die Parabel durch die beiden Extrempunkte von G das Flächenstück teilt, das G mit der x-Achse einschließt.

---

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \to \frac{1}{a^2+1}\cdot x^2 - x$ mit $a > 0$.

a) Berechne in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, den ein Schargraph mit der x-Achse einschließt.

b) Gibt es einen Fläche extremalen Inhalts?

---

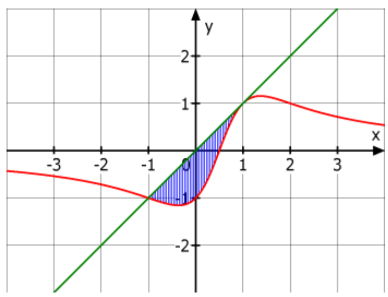
4. Gegeben f: $x \to e^{x-2} - 1$.

Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Tangente im Punkt $P(3 \mid y_P)$ einschließt.

---

5. Das Bild zeigt den Graphen von $f: x \to \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

Bestimme den Inhalt den der Graph mit der Tangente im Punkt $P(1 \mid 1)$ einschließt.



Lösungen

==

a) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

b) $\int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+1}dx = \frac{1}{a}\ln(e^{ax}+1) + C$

c) $\int \sin(2x+\pi)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)$

d) $\int \frac{\ln x}{x}dx = (\ln x)^2 + C$

e) $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+2x|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\ln 8 - \frac{1}{2}\cdot\ln 3 = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{8}{3} + C$

f) $\int_{-1}^2 \frac{x-3}{x^2-9}dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{x+3}dx = \left[\ln|x+3|\right]_{-1}^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$

2.

a) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\cdot(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$f'(x) = 3x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(3-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 3$

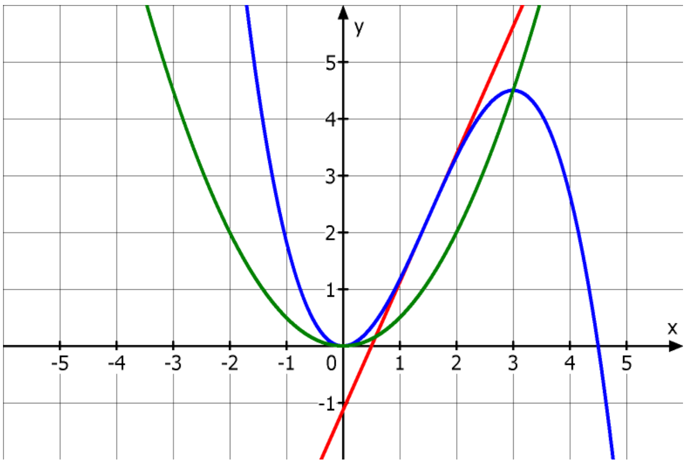
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
x	$-$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x) = x\cdot(3-x)$	$-$	$+$	$-$

$T\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Tiefpunkt und $H\left(3 \mid 4{,}5\right)$ ist Hochpunkt.

b) $f''(x) = 3 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}5$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f''(x)$	$+$	$-$
	LK	RK

$W\left(\frac{3}{2} \mid \frac{9}{4}\right)$ ist Wendpunkt des Graphen von f.



c) $f'(1{,}5) = 2{,}25 = \frac{9}{4}$ und damit ist $y = \frac{9}{4}\cdot(x - \frac{3}{2}) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}x - \frac{9}{8}$

Die gesuchte Fläche hat also den Inhalt

$$\int_0^{1,5} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8})dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}x\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{64}$$

d) Ansatz für die Parabel : $y = a\cdot x^2$

Der Punkt $H\left(3 \mid 4{,}5\right)$ eingesetzt: $4{,}5 = a\cdot 3^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

Fläche zwischen dem Graphen von f und der Parabel:

$$A_1 = \int_0^3 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx = \int_0^3 (x^2 - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse:

$$\int_0^{4,5} (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^{\frac{9}{2}} = \frac{729}{64} = 11\frac{25}{64}$$

Teilverhältnis: $\dfrac{\frac{9}{4}}{11\frac{25}{64} - \frac{9}{4}} = \dfrac{16}{65}$

---

3. a) Nullstellen von f :

$$\frac{1}{a^2+1}\cdot x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left[\frac{1}{a^2+1}\cdot x - 1\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = a^2+1$$

$$\int_0^{a^2+1}\left(\frac{1}{a^2+1}\cdot x^2 - x\right)dx = \left[\frac{1}{a^2+1}\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{a^2+1} = \frac{1}{3}(a^2+1)^2 - \frac{1}{2}(a^2+1)^2 =$$

$$= -\frac{1}{6}(a^2+1)^2$$

$$A(a) = \frac{1}{6}(a^2+1)^2$$

b) $A'(a) = 2\cdot(a^2+1)\cdot 2a > 0$ für $a > 0$ und damit gibt es keine Fläche extremalen Inhalts.

4.

$$f(3) = e^{3-2} - 1 = e - 1$$

$f'(x) = e^{x-2}$ und damit $f'(3) = e^{3-2} = e$

Gleichung der Tangente: $y = e\cdot(x-3) + e - 1 = e\cdot x - 2e - 1$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $e\cdot x - 2e - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2e-1}{e}$ und damit $S\left(\frac{2e+1}{e} \mid 0\right)$

Flächeninhalt des Steigungsdreiecks SPP':

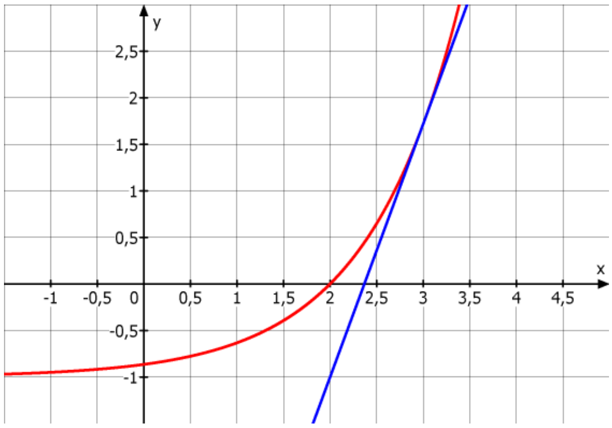
$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left[3 - \frac{2e+1}{e}\right]\cdot(e-1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e-1}{e}\cdot(e-1) = \frac{(e-1)^2}{2e}$$

Nullstelle von f : $e^{x-2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f mit den Geraden $x = 2$ und $x = 3$ einschließt

$$A_1 = \int_2^3 (e^{x-2} - 1)dx = \left[e^{x-2} - x\right]_2^3 = \left(e-3\right) - \left(1-2\right) = e - 2$$

$$A = A_1 - A_\Delta = e - 2 - \frac{(e-1)^2}{2e} = \frac{2e^2 - 4e - e^2 + 2e - 1}{2e} = \frac{e^2 - 2e - 1}{e} \approx 0{,}175$$



---

5. $f'(x) = \dfrac{2\cdot(x^2-x+1) - (2x-1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(1) = 1$

Gleichung der Tangente: $y = 1\cdot(x-1)+1 = x$

$f(-1) = -1$ d.h. $Q\left(-1 \mid -1\right)$ ist der zweite Schnittpunkt der Tangente mit dem Graphen von f.

$$\int_{-1}^{1}\left(x - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2-x+1)\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}-\ln 1\right) - \left(\frac{1}{2}-\ln 3\right) = \ln 3$$
