## I. Wendepunkte

1. Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte sowie die Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit der angegebenen Funktionsgleichung.

   a) $f(x) = \frac{1}{12} \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+6)$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

---

2. Gegeben ist die Funktion $f : x \to y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$

   mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ und dem Grphen G.

   a) Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zum Punkt $S(0 \mid 2)$ ist.

   b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$

   c) Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte von f.

   d) Zeigen Sie, dass S der einzige Wendepunkt von G ist.

   e) Zeichnen Sie G für $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$.

   f) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $B(-2 \mid 1)$ an den Graphen von f.

   g) Bestimmen Sie die Nullstelle von f auf zwei Dezimalen genau.

---

3. Untersuchen Sie die folgenden durch ihre Funktionsgleichungen gegebenen Funktionen auf

   • Symmetrie • Nullstellen • Wendepunkte • Verhalten im Unendlichen

   a) $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 9)$ b) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$

---

**Lösungen**

===================================================================

1. a) $f(x) = \frac{1}{12}\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+6) = \frac{1}{12}\cdot(x^2-x-2)\cdot(x+6) = \frac{1}{12}\cdot(x^3+5x^2-8x-12)$

$f'(x) = \frac{1}{12}\cdot(3x^2+10x-8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \vee x = \frac{2}{3}$

$f''(x) = \frac{1}{12}\cdot(6x+10) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$

$f''(-4) = -\frac{7}{6} < 0 \quad \rightarrow \quad H\left(-4 \mid 3\right)$ ist ein Hochpunkt

$f''(\frac{2}{3}) = \frac{7}{6} > 0 \quad \rightarrow \quad T\left(\frac{2}{3} \mid -\frac{100}{81}\right)$ ist ein Tiefpunkt.

$f'''(1) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \rightarrow \quad W\left(-\frac{5}{3} \mid \frac{143}{162}\right)$ ist ein Wendepunkt.

---

b) $T_1\left(-1 \mid -\frac{5}{12}\right)$, $T_2\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$ sind Tiefpunkte und $H\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Hochpunkt.

$x = \frac{1-\sqrt{7}}{3}$ und $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ sind Wendestellen.

---

2. a) Der Graph von h mit $h(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

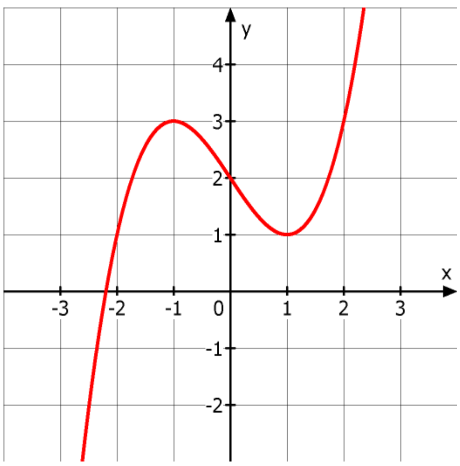
Also ist der Graph von f punktsymmetrisch zu S.

b) vgl. Graph

c) vgl. Graph

d) ----

e)



f) $y = \frac{9}{2}x + 10$

g) $x \approx 2{,}20$ (Newtonverfahren)

---

3. a) • Symmetrie

$$f(-x) = \frac{1}{9}\cdot[(-x)^2 - 4]\cdot[(-x)^2 + 9] = \frac{1}{9}\cdot(x^2 - 4)\cdot(x^2 + 9) = f(x)$$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

• Nullstellen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \ \vee \ x = 2$$

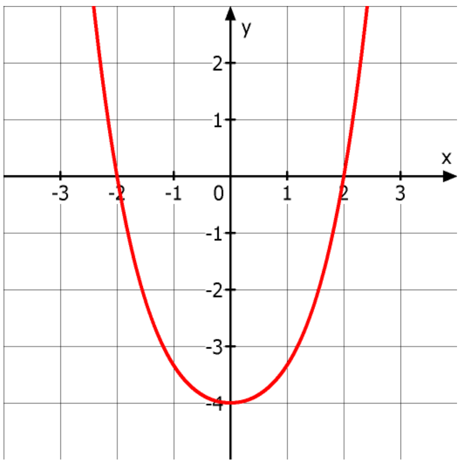
• Wendepunkte

$$f'(x) = \frac{1}{9}\cdot 2x\cdot(x^2 + 9) + \frac{1}{9}\cdot(x^2 - 4)\cdot 2x = \frac{2}{9}x\cdot(2x^2 + 5)$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}\cdot(2x^2 + 5) + \frac{2}{9}x\cdot 4x = \frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{9} \neq 0 \text{ für alle x.}$$

• Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$




---

b) • Symmetrie

$$f(-x) = \frac{4}{5}\cdot(-x)^5 - \frac{10}{3}\cdot(-x)^3 + \frac{9}{4}\cdot(-x) = -f(x)$$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

• Nullstellen

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(\frac{4}{5}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{9}{4}) = 0$$

$$x = 0 \vee \frac{4}{5}x^4 - \frac{10}{3}x^2 + \frac{9}{4} = 0$$

Mit der Substitution $u := x^2$ ergibt sich $\frac{4}{5}u^4 - \frac{10}{3}u + \frac{9}{4} = 0$ und damit

$$u = \frac{\frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}} \vee u = \frac{\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}}$$ und damit

$$x = -\sqrt{\frac{\frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}}} \approx -0{,}92 \vee x = \sqrt{\frac{\frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}}} \approx 0{,}92 \vee$$

$$x = -\sqrt{\frac{\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}}} \approx -1{,}8 \vee x = \sqrt{\frac{\frac{10}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{5}}}{\frac{8}{5}}} \approx 1{,}8$$

- Wendepunkte

$$f'(x) = 4x^4 - 10x^2 + \frac{9}{4}$$

$$f''(x) = 16x^3 - 20x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

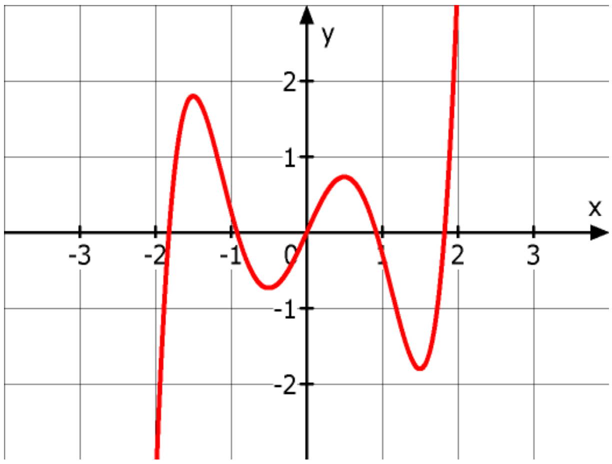
| | $-\infty < x < -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 0$ | $0 < x < \frac{1}{2}\sqrt{5}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{5} < x < \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| f ''(x) | – | + | – | + |

Der Graph der Funktion besitzt die Wendepunkte

$$W_1\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} \mid \frac{1}{3}\sqrt{5}\right) \quad W_2\left(0 \mid 0\right) \quad W_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{5} \mid -\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$$

- Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$




---

**II. Extremwertaufgaben**

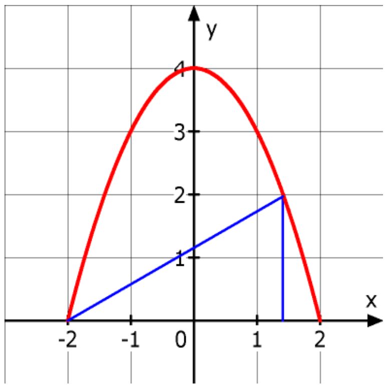
==================================================================

1. Der Punkt $C\left(x \mid y\right)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f mit

   $f(x) = -x^2+4$

   Für welchen Wert von x hat das Dreieck ABC mit $A\left(-2 \mid 0\right)$

   und $B\left(x \mid 0\right)$ maximalen Flächeninhalt ?




---

2. Welcher Quader mit quadratischer Grundfläche hat bei gegebenem Volumen V den kleinsten Oberflächeninhalt ?

---

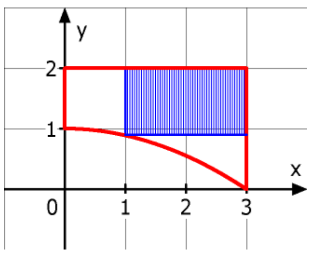
3. Einer Halbkugel mit dem Radius R wird ein Kegel einbeschrieben, dessen Spitze der Mittelpunkt des Grundkeises der Halbkugel ist.

   Bestimmen Sie das größte Volumen, das ein derartiger Kegel haben kann!

---

4. Dem nebenstehenden Flächenstück, das von y-Achse, den Geraden $y = 2$ und $x = 3$ und der Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{9}x^2+1$ begrenzt ist, wird ein Rechteck einbeschrieben.

   Bestimmen Sie den Inhalt des größten dieser Rechtecke!




---

**Lösungen**

==================================================================

1. Größe: $G = A = \frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot y$ mit $-2 \le x \le 2$

   Nebenbedingung: $y = 4-x^2$

Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot(4-x^2)$

Extremstellenbestimmung:

$$A'(x) = \frac{1}{2}\cdot(4-x^2)+\frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot(-2x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4-x^2-2x^2-4x = 0 \quad\Leftrightarrow$$

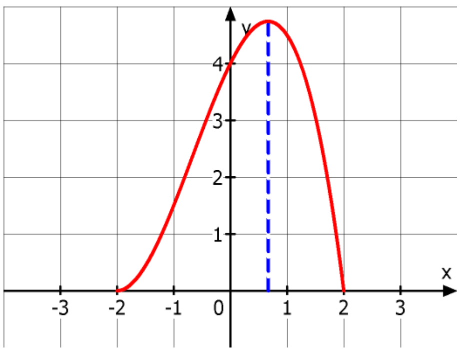
$$3x^2-4x-4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -2 \vee x = \frac{2}{3}$$

| | $-2<x<\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}<x<2$ |
|---|---|---|
| $A'(x)$ | $+$ | $-$ |

Randwerte: $A(-2) = A(2) = 0$

Für $x = \frac{2}{3}$ ergibt sich ein Maximum des Inhalts.

Veranschaulichung der Funktion A(x):




---

2. Größe: $G = O = 2a^2+4a\cdot h$

Nebenbedingung: $V = a^2\cdot h \quad\Rightarrow\quad h = \frac{V}{a^2}$ und damit $0 < a < \infty$

Zielfunktion: $O(a) = 2a^2+4a\cdot\frac{V}{a^2} = 2a^2+\frac{4V}{a}$

Extremwertbestimmung:

$$O'(a) = 4a-\frac{4V}{a^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt[3]{V} \text{ und damit } h = \frac{V}{V^{\frac{2}{3}}} = V^{\frac{1}{3}} = a$$

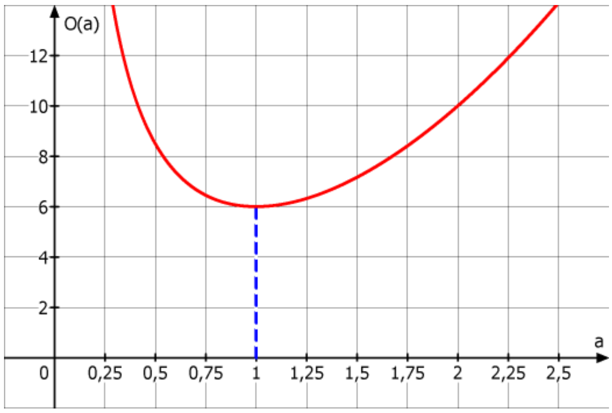
| | $0 < a < \sqrt[3]{V}$ | $\sqrt[3]{V} < a < \infty$ |
|---|---|---|
| $O'(a)$ | $-$ | $+$ |

Randwerte: $\lim_{a\to 0} O(a) = \infty$ und $\lim_{a\to\infty} O(a) = \infty$

Damit sich ein minimaler Oberflächeninhalt ergibt muss der Quader ein Würfel sein.

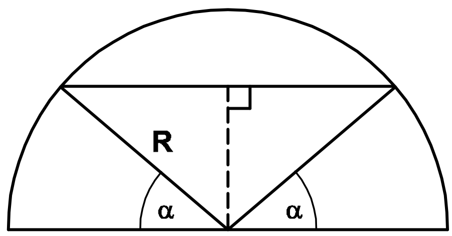
Es ist dann $O(V^{\frac{1}{3}}) = 6V^{\frac{2}{3}}$.

Veranschaulichung der Funktion $O(a)$ mit $V = 1$:




---

3. Planfigur:




Größe: $G = V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Zielfunktion: $V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot (R \cdot \cos x)^2 \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x$ mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Reduzierte Zielfunktion (ohne konstante Faktoren): $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$

Extremstellenberechnung:

$f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin^2 x) + \cos^2 x \cdot \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x \cdot (-2\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \quad \Rightarrow$

$\cos x = 0 \vee -3\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \vee \sin x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

und damit $\cos x = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Randwerte: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$

und damit ergibt sich für $\sin x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ein Maximum des Rauminhalts

Es ergibt sich $V_{max} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{27}R^3 \cdot \sqrt{3}$

---

4. Zielfunktion: $A(x) = (3-x)\cdot[2-(-\frac{1}{9}x^2+1)] = (3-x)\cdot(1+\frac{1}{8}x^2)$ mit $0 \le x < 3$

Extremstellenbestimmung:

$A'(x) = -(1+\frac{1}{9}x^2) + (3-x)\cdot\frac{2}{9}x = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1 < 0$

Randwerte: $A(0) = 3$ und $\lim\limits_{x \to 3-0} A(x) = 0$

Das größte Rechteck hat den Flächeninhalt $A(0) = 3$.

---

## III. Steckbriefaufgaben

1. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades hat die Nullstelle $x = 2$ und ihr Graph besitzt den Tiefpunkt $H\left(1 \mid 9\right)$. Bestimmen Sie eine die Funktionsgleichung der Funktion.

---

2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Graph im Ursprung einen Wendepunkt mit der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten als Tangente und im Punkt $H\left(2 \mid 4\right)$ einen Hochpunkt hat.

---

3. Die Funktion f hat die Polstelle $x = -1$ und die Extremstelle $x = 1$ und ihr Graph besitzt die Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x+1$.

   Ermittle eine mögliche Funktionsgleichung von f.

---

## Lösungen

1. Ansatz: $f(x) = ax^4+bx^2+c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4ax^3+2bx$

$$\begin{array}{rl|rcl} f(2) = 0 \Rightarrow & (1) & 16a+4b+c & = & 0 \\ f(1) = 9 \Rightarrow & (2) & a+b+c & = & 9 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow & (3) & 4a+2b & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rcll} (1)-(2) & 15a+3b & = & -9 & (4) \\ (3) & b & = & -2a & (3') \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (3') \text{ in } (4) & 15a-6a = -9 \Rightarrow a = -1 \end{array}$$

Also $f(x) = -x^4+2x^2+8$

---

2. Ansatz: $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d \quad \Rightarrow$

$$f''(x) = 12ax^2+6bx+2c$$

Wegen $f(0) = e = 0$ und $f''(0) = 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$ muss gelten

$$\begin{array}{rr|rcl} f(2) = 4 \Rightarrow & (1) & 16a+8b+2d & = & 4 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow & (2) & 32a+12b+d & = & 0 \\ f'(1) = 1 \Rightarrow & (3) & d & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot(1)-(2) & 4b+3d = 8 \Rightarrow b = \frac{5}{4} \end{array}$$

Also $f(x) = -\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^3+x$

---

3. Ansatz: $f(x) = \frac{1}{2}x+1+\frac{a}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{a}{(x+1)^2}$$

Bedingung: $f'(1) = \frac{1}{2}-\frac{a}{(1+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

---

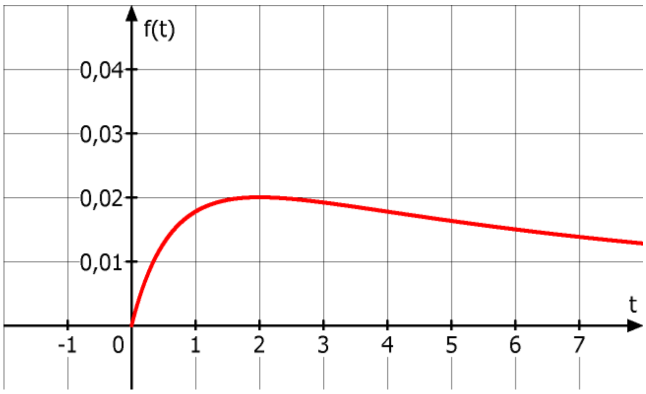
## IV. Mathematische Modellierung

Die Konzentration eines Medikamentes (in $\frac{mg}{cm^3}$) im Blut eines Patienten lässt sich durch die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(t) = \frac{0{,}16t}{(t+2)^2}$ beschreiben.

Dabei sei t die Zeit gemessen in Stunden seit der Einnahme des Medikaments.

Der Graph der Funktion sieht in einem

Teil des Definitionsbereichs so aus:




a) Berechnen Sie die anfängliche Änderungsrate der Konzentration und vergleichen Sie diese mit der mittleren Änderungsrate in den ersten 6 Minuten.

b) Wann ist die Konzentration am größten und wie groß ist sie?

Wann ist die Konzentration nur noch halb so groß?

c) Zu welchem Zeitpunkt ändert sich die Änderungsrate am stärksten?

---

**Lösungen**

===============================================================

a) $f'(t) = 0{,}16 \cdot \frac{1 \cdot (t+2)^2 - t \cdot 2 \cdot (t+2)}{(t+2)^4} = 0{,}16 \cdot \frac{2-t}{(t+2)^3}$

$f'(0) = 0{,}04$ und $m_S(0; 6) = \frac{f(6) - f(0)}{6-0} = \frac{0{,}015-0}{6} = 0{,}0025$

b) $f'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$ und $f(2) = 0{,}02$

$f(x) = \frac{0{,}16t}{(t+2)^2} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 16t = t^2+4t+4 \quad \Rightarrow \quad t = 6+4\sqrt{2} \approx 11{,}7$

c) $f''(t) = 0{,}16 \cdot \frac{-1 \cdot (t+2)^3 - (2-t) \cdot 3 \cdot (t+2)^2}{(t+2)^6} = 0{,}16 \cdot \frac{2t-8}{(t+2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4$

---

**V. Funktionenscharen**

===============================================================

1. Geben ist die Funktionsschar $f_k$ mit $f_k(x) = x^3 - 3k^2x$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Diskutieren Sie die Scharfunktionen und zeichnen Sie den Graph von $f_1$.

b) Bestimmen Sie k so, dass

i) der Graph von $G_k$ von $f_k$ durch den Punkt $P\left(2 \mid 5\right)$ geht.

ii) die Gerade $y = -x$ den Graphen von $f_k$ im Koordinatenursprung berührt.

iii) die Extrempunkte von $G_k$ auf der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten liegen.

iv) die Tangente im Schnittpunkt von $G_k$ mit der positiven x-Achse die Steigung 1 hat.

---

2. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k$ mit $f_k(x) = x^2 - kx^3$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Diskutieren Sie die Scharfunktionen und zeichnen Sie den Graph von $f_{0,25}$.

---

3. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k$ mit $f_k(x) = 1 - \dfrac{2}{e^x + k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Diskutiere die Scharfunktionen und zeichne die Graph von $f_1$, $f_2$ und $f_3$.

---

**Lösungen**

---

1. a) Symmetrie: $f_k(-x) = (-x)^3 - 3k^2 \cdot (-x) = -x^3 + 3k^2 \cdot x = -f_k(x)$

Der Graph jeder Scharfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinaten ursprung

Nullstellen: $f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 3k^2) = 0 \quad x = 0 \vee x = -k\sqrt{3} \vee x = k\sqrt{3}$

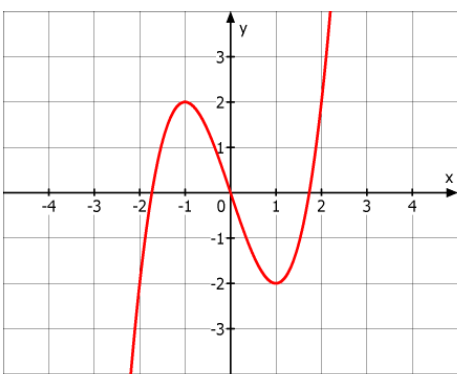
Extrema: $f_k'(x) = 3x^2 - 3k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -k \vee x = k$

$f_k''(x) = 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$f_k''(-k) = -6k < 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(-k | -2k^3)$ ist ein Hochpunkt

$f_k''(k) = 6k > 0 \quad \Rightarrow \quad E_1(k | 2k^3)$ ist ein Tiefpunkt

Wendepunkte: $f_k'''(x) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 | 0)$ ist ein Wendepunkt



b) i) $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$   ii) $k = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

iii) $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$   iv) $k = \frac{1}{6}\sqrt{6}$

---

2. Nullstellen: $f_k(x) = x^2 - kx^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (1 - kx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$.

Grenzverhalten:

$k > 0: \lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$

$k = 0: \lim\limits_{x \to \pm\infty} f_0(x) = \infty$

$k < 0: \lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = \infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = -\infty$

Extrema: $f_k'(x) = 2x - 3k \cdot x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (2 - 3k \cdot x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{2}{3k}$ $(k \neq 0)$

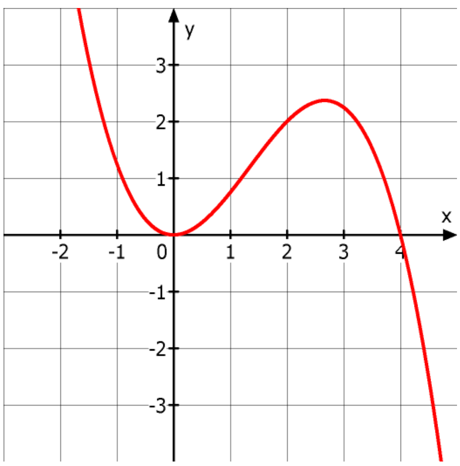
$f_k''(x) = 2 - 6k \cdot x$

$f_k''(0) = 2$ und $f_k''(\frac{2}{3k}) = -2$

$k \neq 0: E_1\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Hochpunkt und $E_2\left(\frac{3}{2k} \mid -\frac{9}{8k^2}\right)$ ist Tiefpunkt.

Wendepunkte: $f_k''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3k}$ $(k \neq 0)$ $\quad f_k'''(x) = 2 \neq 0$

$W\left(\frac{1}{3k} \mid \frac{2}{27}k^2\right)$ ist ein Wendepunkt.




---

3. Nullstellen: $f_k(x) = 1 - \frac{2}{e^x + k} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 2 - k$

Für $k \geq 2$ besitzt eine Scharfunktion keine Nullstelle.

Für $0 < k < 2$ besitzt eine Scharkunktion die Nullstelle $x = \ln(2-k)$

Grenzverhalten: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = 1 - \frac{2}{k}$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = 1$

Monotonie: $f_k'(x) = \frac{2}{(e^x + k)^2} > 0$ d.h. $f_k$ ist streng monoton wachsend.