Stammfunktionen

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x^k$ mit $k \in$, $\mathbf{k \neq -1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Beispiele:

a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{5}x^5$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$
$f(x) = \frac{1}{ax+b}$	$f(x) = \frac{1}{a} \cdot \ln\lvert ax+b\rvert$
$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$f(x) = \ln\lvert g(x)\rvert$

Beispiele:

a) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln\lvert x-1\rvert$

b) $f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\lvert 2x+1\rvert$

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ mit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ und $p \in \mathbb{Z}$	$F(x) = \frac{x^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}$
$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a} \cdot (ax+b)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3a} \cdot \sqrt{(ax+b)^3}$

Beispiele:

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{x}$

c) $f(x) = x\cdot\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}$

e) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow F(x) = \ln(x^2+1)$

f) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = \ln(e^x+1)$

g) $f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+1)^3}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2}x-1)^3} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2}x-1)^3}$

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b}$
$f(x) = g'(x)\cdot e^{g(x)}$	$F(x) = e^{g(x)}$

Beispiele:

a) $f(x) = e^{x-1} \Rightarrow F(x) = e^{x-1}$

b) $f(x) = e^{-x} \Rightarrow F(x) = -e^{-x}$

c) $f(x) = e^{0,5x+1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{0,5}\cdot e^{0,5x+1} = 2\cdot e^{0,5x+1}$

d) $f(x) = 2x\cdot e^{x^2} \Rightarrow F(x) = e^{x^2}$

Zwei spezielle Stammfunktionen:

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x\cdot\ln x - x$

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x\cdot e^x$	$F(x) = x\cdot e^x - e^x$

#

Funktion	Stammfunktion
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b)$

$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b)$

$f(x) = \tan x$	$F(x) = -\ln\lvert\cos x\rvert$
$f(x) = \tan(a\cdot x+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\cdot\tan(ax+b)$

Beispiele:

a) $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\sin(\frac{1}{2}x) = 2\cdot\sin(\frac{1}{2}x)$

b) $f(x) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$

Regeln
==

Faktorregel:

Ist die F(x) eine Stammfunktion vonf(x),

dann ist $a\cdot F(x)$ eine Stammfunktion von $a\cdot f(x)$.

Bemerkung:

Die mathematische Strenge wurde einer prägnanten Formulierung geopfert.

Beispiele:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^5}{5} = \frac{1}{20}x^5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x} = -\frac{1}{4}\cdot e^{-2x}$

Faktorregel:

Ist die G(x) eine Stammfunktion von g(x) und H(x) eine Stammfunktion von h(x), dann ist $G(x)+H(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)+h(x)$.

Beispiele:

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + x^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{3}x^3 - x^{-1} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 - 2\cdot\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

Warnung:

Ist die $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$,

dann ist $G(x)\cdot H(x)$ **keine** Stammfunktion von $g(x)\cdot h(x)$.

Warnung:

Ist die $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ und $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$,

dann ist $\frac{G(x)}{H(x)}$ **keine** Stammfunktion von $\frac{g(x)}{h(x)}$.

Eine Umformung kann die Integration ermöglichen.

Beisspiele:

a) $f(x) = (1-x)\cdot(1+\frac{1}{x}) = 1 + \frac{1}{x} - x - 1 = \frac{1}{x} - x \Rightarrow F(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2} = 2 + \frac{1}{x^2} = 2 + x^{-2} \Rightarrow F(x) = 2x + \frac{x^{-1}}{-1} = 2x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = x - \ln(e^x+1)$
