1. Zufallsexperimente und Ergebnismengen

===

1.1 Der Ergebnisraum

Viele Experimente besitzen keine exakt vorhersagbaren Ergebnisse. Man spricht von ***Zufallsexperimenten***.

Beispiel :

Experiment : Werfen eines Würfels

Menge der möglichen Ergebnisse : $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$

Experiment : Werfen einer Münze

Menge der möglichen Ergebnisse : $\Omega = \left\{Z, K\right\}$

Bei einem ***Zufallsexperiment*** seien n verschiedene Ergebnisse ω_i , $1 \leq i \leq n$, möglich.
Dann heißt

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\right\}}}$$

eine ***Ergebnismenge*** des Experiments.

Die Anzahl n der Elemente von Ω heißt **Mächtigkeit** $\left|\Omega\right|$ von Ω.

Ein und demselben Zufallsexperiment können je nach Betrachtungsweise verschiedene Ergebnisräume zugeordnet werden.

Beispiel:

Experiment : Werfen eines Würfels

Ergebnisraum "Augenzahlen" : $\Omega_1 = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$

Ergebnisraum "**g**erade oder **u**ngerade Augenzahl" : $\Omega_2 = \left\{g, u\right\}$

1.2 Der Ergebnisraum zusammengesetzter Zufallsexperimente

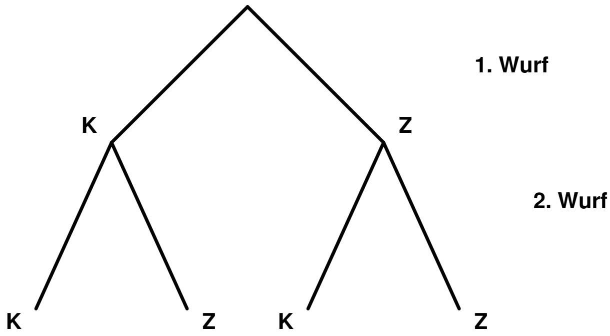
Viele Zufallsexperimente sind aus mehreren Teilexperimenten zusammengesetzt, sei es, dass man ein und dasselbe Experiment mehrmals ausführt oder verschiedene Experimente als ein Experiment betrachtet.

Beispiele :

Experiment : Zweimaliges Werfen einer Münze

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{ KK, KZ, ZK, ZZ \right\}$

Das Zustandekommen der Ergebnisse bei einem zusammengesetzten Zufallsexperiment lässt sich durch ein ***Baumdiagramm*** veranschaulichen.



$$\left| \Omega \right| = 2 \cdot 2 = 4$$

Einen von oben nach unten führenden Streckenzug in einem Baumdiagramm nennt man einen **Pfad**, jede Strecke eines Pfades einen **Ast**.

Die Anzahl aller Pfade ist gleich der Mächtigkeit des Ergebnisraumes.

Beispiel:

Eine Urne enthält 3 weiße, 2 rote und 1 schwarze Kugel. Es werden 2 Kugeln

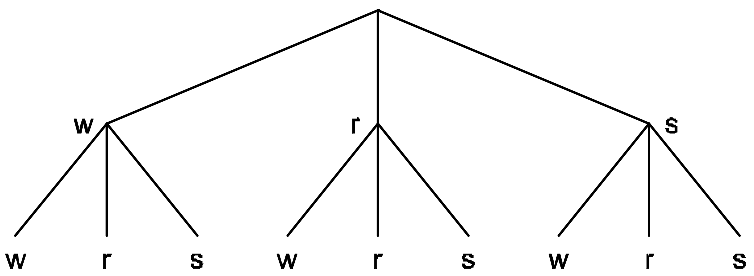
a) einzeln und hintereinander mit Zurücklegen

b) einzeln und hintereinander ohne Zurücklegen

b) gleichzeitig

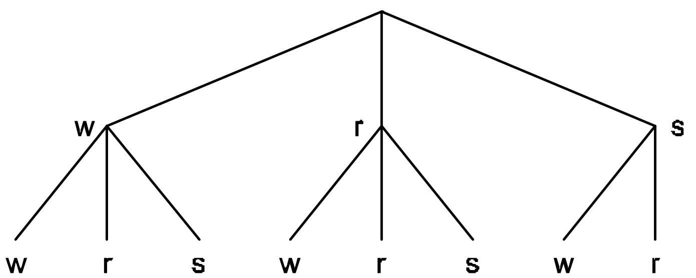
entnommen.

a) Baumdiagramm :



$$\Omega = \left\{ ww,\ wr,\ ws,\ rw,\ rr,\ rs,\ sw,\ sr,\ ss \right\}$$

b)



$$\Omega = \left\{ ww,\ wr,\ ws,\ rw,\ rr,\ rs,\ sw,\ sr \right\}$$

c) $\Omega = \left\{ \{w,w\},\ \{w,r\},\ \{r,r\},\ \{r,s\} \right\}$

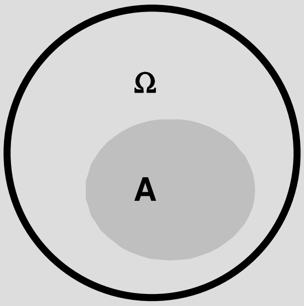
1.3 Ereignisse

Experiment : Würfeln

Ergebnisraum : $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis "Gerade Augenzahl" : $A = \{2, 4, 6\}$

Eine **Teilmenge** A der Ergebnismenge Ω eines Zufallsexperiments heißt ***Ereignis***.



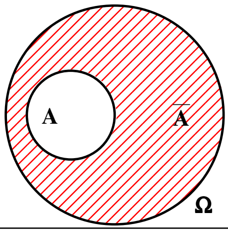
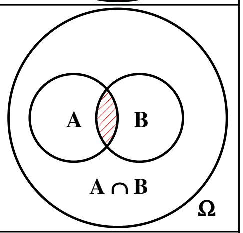
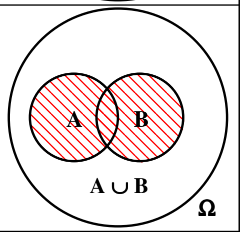
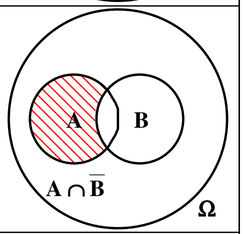
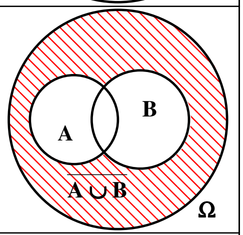
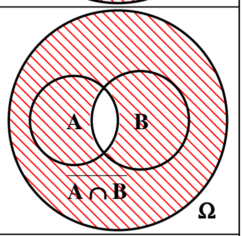
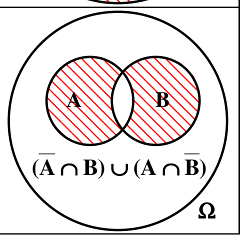
Das Ereignis A tritt dann ein, wenn das Versuchsergebnis ω in A liegt;$\omega \in A$, es tritt nicht ein, wenn $\omega \notin A$.

$\{\} \subseteq \Omega$ bzw. heißt ***unmögliches Ereignis*** ({ } ist die leere Menge)

$\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ ist ein **einelementiges Ereignis**

$\Omega \subseteq \Omega$ heißt ***sicheres Ereignis***

1.4 Zusammengesetzte Ereignisse

$\overline{A}$: Das Ereignis A tritt nicht ein	
$A \cap B$: Ereignis A und Ereignis B tritt ein	
$A \cup B$: Ereignis A oder Ereignis B tritt ein	
$A \cap \overline{B}$: Ereignis A tritt und ein Ereignis B tritt nicht ein	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: Weder Ereignis A noch Ereignis B tritt ein	
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: Ereignis A und Ereignis B treten nicht zusam- men ein	
$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$: Entweder Ereignis A oder Ereignis B tritt ein	

Die Fächeninhalte können als Maß für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse gedeutet werden.

1.5 Wahrscheinlichkeit

Eine Funktion P, die jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ eine reelle Zahl P(A), die Wahrscheinlichkeit P(A) von A zuordnet,

$P : A \to P(A)$,

heißt ***Wahrscheinlichkeitsverteilung***, wenn die ***Axiome von Kolmogorow***

W 1 $\mathbf{P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}}$

W 2 $\mathbf{P(\Omega) = 1}$

W 3 $\mathbf{A, B \in \mathfrak{A} \;\; A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

gelten.

Folgerungen:

$$\boxed{\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}}$$

und

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$