Grundkurs	Infinitesmalrechnung I	2002

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \to x - 2 + \frac{4}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

   a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.

   b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

   $$\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}\right]$$

   c) Berechnen Sie $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$ und $f(6)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Asymptoten im Bereich $-4 \leq x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

   d) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = -3x + 10$ Tangente an G_f ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes P an.

   $$\left[\text{Teilergebnis: } x_P = 2\right]$$

   e) G_f, die Gerade g aus Teilaufgabe 1.d) und die Gerade $x = 3$ begrenzen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A. Berechnen Sie A.

---

2. Gegeben ist die Funktion $v : t \to 5\cdot(1 - e^{-t})$ mit $t \geq 0$

   a) Der Graph dieser Funktion soll skizziert werden. Entwickeln Sie den Graphen von v, indem Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem der Reihe nach die Graphen der folgenden Funktionen für $t \geq 0$ skizzieren:

   i) $t \to e^{-t}$ ii) $t \to -e^{-t}$ iii) $t \to -e^{-t} + 1$ iv) $t \to v(t)$

   b) In einem Versuch wird die Geschwindigkeit eines Körpers im durch Reibung gebremsten freien Fall untersucht. Die Funktion v beschreibt näherungsweise die Maßzahl der Geschwindigkeit des verwendeten Körpers in Abhängigkeit von der Maßzahl der Zeit t.

   Deuten Sie den Graphen von v in diesem Anwendungsbezug. Gehen Sie insbesondere auf das Verhalten für $t \to \infty$ ein.

Lösung

1\. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - 2 + \dfrac{4}{x-1}\right) = -\infty$ da $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x - 2 + \dfrac{4}{x-1}\right) = \infty$ da $\lim\limits_{x \to \infty} (x-2) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} \left(x - 2 + \dfrac{4}{x-1}\right) = -\infty$

da $\lim\limits_{x \to 1-0} (x-2) = -1$ und $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{4}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \left(x - 2 + \dfrac{4}{x-1}\right) = \infty$ da Pol ungerader Ordnung

Senkrechte Asymptote: $x = 1$

Wegen $\lim\limits_{x \pm \infty} \dfrac{4}{x-1}$ kommt der Graph von f der Geraden $y = x - 2$ beliebig nahe.

Der Graph von f besitzt die schiefe Asymptote $y = x - 2$

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{0 \cdot (x-1) - 4 \cdot 1}{(x-1)^2} = 1 + \dfrac{-4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x + 1 - 4}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 3$

$f(-1) = -5$ und $f(3) = 3$

Monotoniebetrachtung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$	+	–	-	+

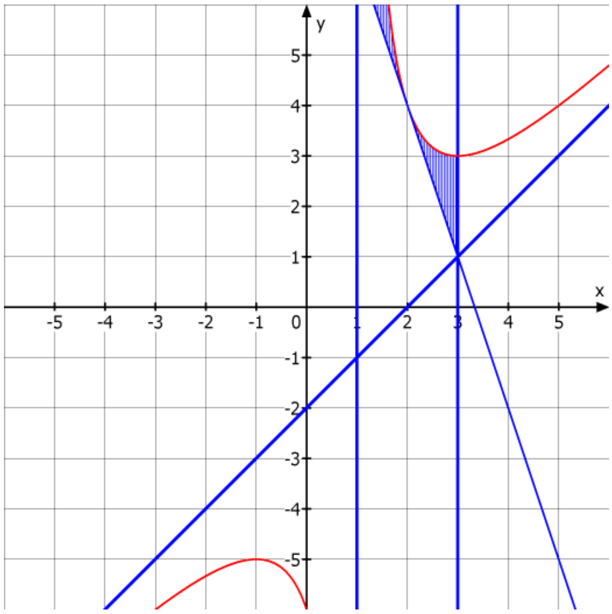
$E_1\left(-1 \mid -5\right)$ ist ein Hochpunkt und $E_2\left(3 \mid 3\right)$ ist einTiefpunkt des Graphen von f.

Beachte:

Das Monotonieverhalten einer gebrochenrationalen Funktion kann sich an Nullstellen der ersten Ableitung oder an Definitionslücken ändern.

c)

x	-4	0	2	6
f(x)	$-6{,}8$	-6	4	$4{,}8$



d) 1. Methode:

Man weist nach, dass die Gerade $g : y = x - 2$ nur einen Punkt mit G_f gemeinsam hat.

Schnittpunktsbedingung:

$$x - 2 + \frac{4}{x-1} = -3x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 12 + \frac{4}{x-1} = 0 \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow \quad (4x-12)\cdot(x-1) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 16x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Die Gerade g berührt den Graphen im Punkt $P\left(2 \mid 4\right)$

2. Methode

Man bestimmt die Stellen, wo die Ableitung von f den Wert -3 hat.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = -3\cdot(x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x\cdot(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 2$$

Tangente im Punkt $P\left(2 \mid 4\right)$ ist $y = -3\cdot(x-2) + 4 = -3x + 10$

und damit ist alles gezeigt.

e) $A = \int_2^3 [(x-2+\frac{4}{x-1}) - (-3x+10)dx = \int_2^3 (4x-12+\frac{4}{x-1})dx =$

$$= \left[2x^2 - 12x + 4 \cdot \ln|x-1|\right]_2^3 = \left(18-36+4\cdot\ln 2\right) - \left(-24+8\right) = 4\cdot\ln 2 - 2$$

Beachte:

Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{a}{bx-c}$ ist $F(x) = \frac{1}{b}\cdot\ln|bx-c|$.

---

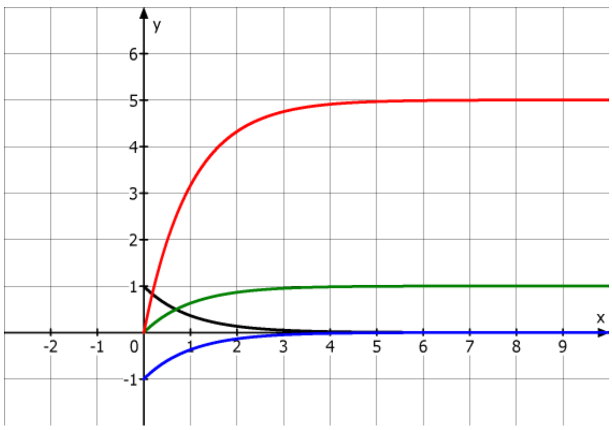
2. a) Den Graphen von $t \rightarrow e^{-t}$ erhält man durch Spiegelung der Graphen von $t \rightarrow e^{t}$ an der y-Achse.

Durch Spiegelung dieses Graphen an der x-Achse erhält man den Graphen von $t \rightarrow -e^{-t}$.

Durch Verschiebung dieses Graphen um 1 Einheit nach oben erhält man den Graphen von

$t \rightarrow -e^{-t}+1$

Verfünffacht man die y-Koordinaten der Punkte auf diesem Graphen erhält man den Graphen von $t \rightarrow v(t)$



b) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, wobei die Zunahme wegen der zunehmenden Reibung abnimmt.

Es ist $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 5$ d.h. v geht im vorliegenden Fall gegen eine Grenzgeschwindigkeit.

Grundkurs	Infinitesmalrechnung I	2003

Gegeben ist die Funktion f: $x \to e^{1-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes sowie die Lage der Wendepunkte von G_f.

c) Berechnen Sie f(1) und f(2).

Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \le x \le 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).

---

2. Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion h: $x \to \frac{1}{f(x)}$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.

a) Geben Sie die Wertemenge von h an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f und G_h.

Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-1{,}5 \le x \le 1{,}5$ in das obige Koordinatensystem ein.

b) Ermitteln Sie den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche näherungsweise, indem Sie den Flächeninhalt eines geeigneten Drachenvierecks berechnen.

Zeichnen Sie das verwendete Drachenviereck in das oben verwendete Koordinatensystem ein.

c) Bestimmen Sie für die quadratische Funktion p: $x \to ax^2 + bx + c$ mit $D_p = \mathbb{R}$ die Parameter a, b und c so, dass der Graph von p im Punkt $S\left(0 \mid e\right)$ seinen Scheitel hat und durch die Punkte $A\left(-1 \mid 1\right)$ und $B\left(1 \mid 1\right)$ verläuft.

d) Der Graph der quadratischen Funktion q: $x \to (1 - \frac{1}{e}) \cdot x^2 + \frac{1}{e}$ mit $D_q = \mathbb{R}$ hat seinen Scheitel im Punkt $T\left(0 \mid \frac{1}{e}\right)$ und verläuft durch die Punkte $A\left(-1 \mid 1\right)$ und $B\left(1 \mid 1\right)$ (Nachweis nicht verlangt).

Berechnen Sie nun näherungsweise den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche, indem Sie die Funktionen p und q als Näherungen für die Funktionen f und h verwenden.

Lösung

1. a) $f(-x) = e^{1-(-x)^2} = e^{1-x^2} = f(x)$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1-x^2} = 0$, weil $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1-x^2) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) $f'(x) = e^{1-x^2} \cdot (-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Da $f(x) > 0$ für $x < 0$ und $f(x) < 0$ für $x > 0$ ist $H\left(0 \mid e\right)$ ein Hochpunkt des Graphen.

$f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -2 \cdot e^{1-x^2} - 2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = 2 \cdot e^{1-x^2} \cdot (2x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Es ist $f(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = e^{1-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

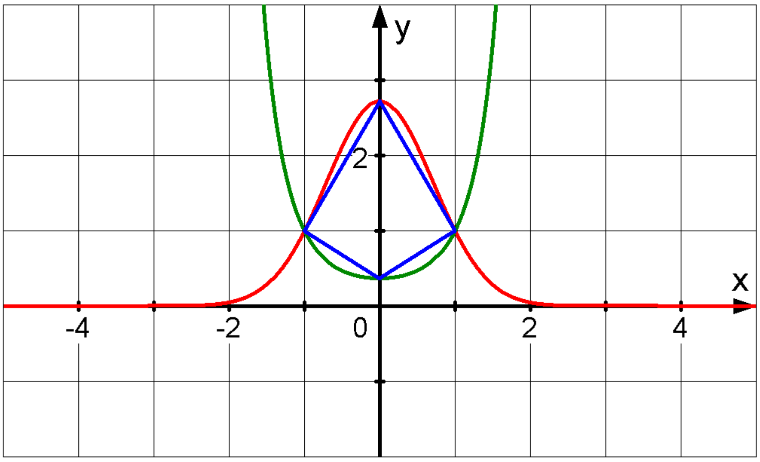
Vorzeichenbetrachtung der 2.Ableitung

	$-\infty < x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \infty$
$2x^2 - 1$	+	−	+
$2 \cdot e^{1-x^2}$	+	+	+
$f''(x)$	+	−	+
	LK	RK	LK

$W_1\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \sqrt{e}\right)$ und $W_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \sqrt{e}\right)$ sind Wendepunkte.

$f''(0) = -2e < 0$ beweist ebenfalls, dass $H\left(0 \mid e\right)$ ein Hochpunkt des Graphen ist.

c) $f(1) = e^0 = 1$ und $f(2) = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx 0{,}05$



---

2. a) Wertemenge: $W = [\frac{1}{e}; \infty[$

Schnittpunkte:

$$f(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[f(x)\right]^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -1 \ \vee \ f(x) = 1$$

$$e^{1-x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 1$$

$S_1\left(-1 \mid 1\right)$ und $S_2\left(1 \mid 1\right)$

b) $A_D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{e}$

c) Ansatz: $p(x) = a \cdot x^2 + e$

Einsetzen von $B\left(1 \mid 1\right)$: $1 = a + e \quad \Rightarrow \quad a = 1 - e$

$$p(x) = (1-e) \cdot x^2 + e$$

d) $$\int_0^1 \left[(1-e) \cdot x^2 + e - (1 - \frac{1}{e}) \cdot x^2 - \frac{1}{e}\right] dx = \int_0^1 \left[(\frac{1}{e} - e) \cdot x^2 + (e - \frac{1}{e})\right] dx =$$

$$= \left[(\frac{1}{e} - e) \cdot \frac{1}{3} x^3 + (e - \frac{1}{e}) \cdot x\right]_0^1 = \frac{2}{3} e - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{3} \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$A = \frac{4}{3} \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right)$ (Achsensymmetrie)

Grundkurs	Infinitesmalrechnung I	2005

Gegeben ist die Funktion $f : x \to 1 - (\ln x)^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f.von f an.

$$\left[\text{Teilergebnis: } E\left(1 \mid 1\right)\right]$$

c) Die einzige Wendestelle von f ist $x_W = e$ (Nachweis nicht erforderlich).

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w.

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2\right]$$

d) Berechnen Sie $f(e^{-2})$ und $f(6)$.

Zeichnen Sie die Wendetangente w und den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \le 6$.

Lösung

a) $f(x) = 1-(\ln x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \vee \ln x = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e} \vee \ln x = e^1 = e$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} [1-(\ln x)^2)] = -\infty \text{ da } \lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} [1-(\ln x)^2)] = -\infty \text{ da } \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

b) $f'(x) = -2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ (Summen- und Kettenregel)

Monotonieuntersuchung:

x	$0<x<1$	$1<x<\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$

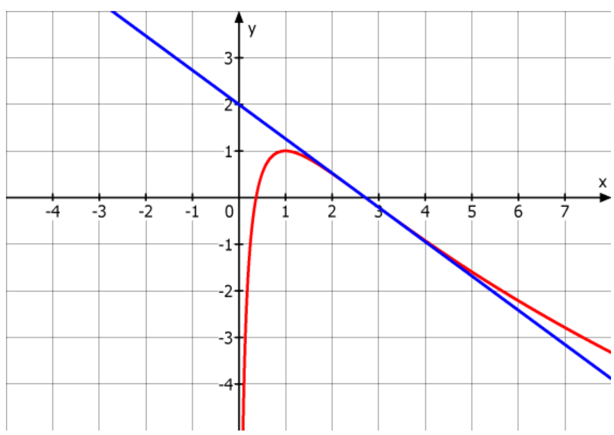
f ist für $0<x \leq 1$ streng monoton steigend und für $1 \leq x < \infty$ streng monoton fallend.

$f(1) = 1-(\ln 1)^2 = 1-0 = 1$ und damit ist $E\left(1 \mid 1\right)$ ein Hochpunkt.

Aufgrund des Montonieverhaltens von f ergibt sich $W_f =]-\infty; 1]$.

c) $f(e) = 0$ und $f'(e) = -2 \cdot \ln e \cdot \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$ ergibt $w: y = -\frac{2}{e} \cdot (x-e) = -\frac{2}{e}x+2$

d) $f(e^{-2}) = 1-4 = -3$ und $f(6) = 1-(\ln 6)^2 \approx -2{,}2$

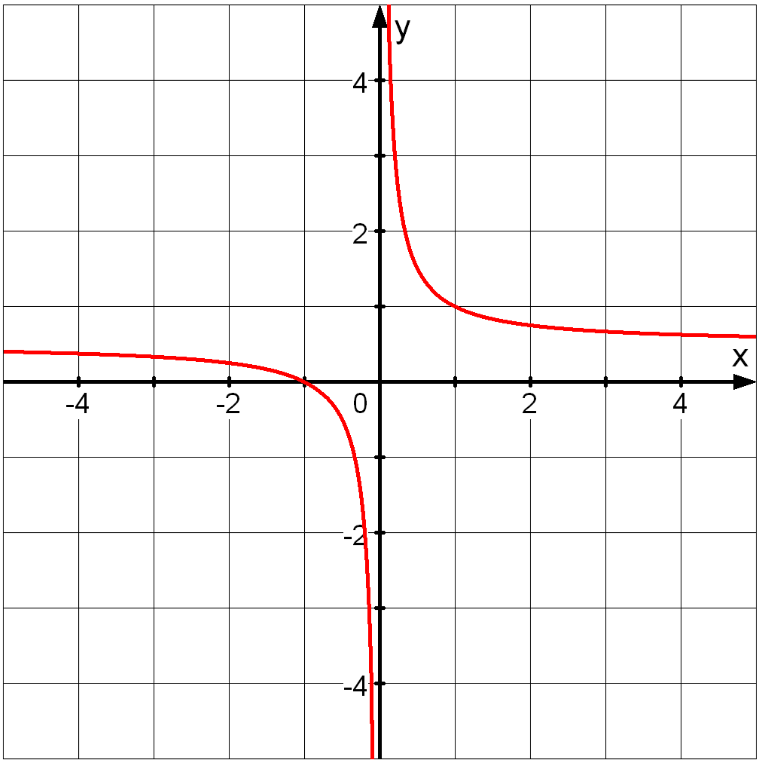


Grundkursabitur 2006	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer rationalen Funktion f der Form

$$f\colon x \to \frac{x+a}{bx}$$

mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.



a) Einziger Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist $A(-1\,|\,0)$, außerdem verläuft G_f durch den Punkt $B(1\,|\,1)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion

$$g\colon x \to \ln f(x) = \ln\frac{x+1}{2x}$$

mit maximalem Definitionsbereich D_g. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

b) Begründen Sie anhand des Verlaufs von G_f, dass gilt: $D_g = \mathbb{R}\setminus[-1; 0]$.

Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.

c) Ermitteln Sie die Nullstelle von g und untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Monotonieverhalten von g.

d) Bestimmen Sie die Stelle x_0, an der die Funktionen f und g in der ersten Ableitung übereinstimmen.

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f in $P\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ sowie die Gleichung der Tangente an G_g in $Q\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$.

Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente in P.

e) Berechnen Sie $g(-4)$,, $g(-2)$, $g(0,1)$ und $g(4)$.

Zeichnen Sie den Graphen G_g sowie seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in die obenstehende Abbildung ein.

Tragen Sie auch die Tangenten in P und Q ein.

f) Die Funktion

$G\colon x \to x \cdot g(x) + \ln(x+1)$

ist für $x > 0$ eine Stammfunktion von g. Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Die Tangenten in P und Q schließen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ ein Parallelogramm ein. Der Graph von g teilt dieses Parallelogramm in zwei Teilflächen.

Wie viel Prozent der Parallelogrammfläche nimmt die Teilfläche unterhalb von G_g ein?

Lösung

a) $A\left(-1 \mid 0\right)$ eingesetzt ergibt $\dfrac{-1+a}{b\cdot(-1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1+a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$B\left(1 \mid 1\right)$ eingesetzt ergibt: $\dfrac{1+1}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2$

Also $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$.

b) g ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) > 0$ definiert. Also ist $D_g = \mathbb{R}\backslash[-1; 0]$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \ln\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1-\infty} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x+1}{2x} = 0+0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -1-0} g(x) = -\infty \text{ da } \lim_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{x+1}{2x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0+0} g(x) = \infty \text{ da } \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

Waagrechte Asymptote: $y = \ln\frac{1}{2}$

Senkrechte Asymptoten: $x = -1$ und $x = 0$

c) $g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\dfrac{x+1}{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$x = 1$ ist die einzige Nullstelle von g.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{2x}} \cdot \frac{1\cdot 2x - (x+1)\cdot 2}{4x^2} = \frac{-1}{x\cdot(x+1)}$$

	$x < -1$	$x > 0$
x	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$

f ist also für $x \in \,]-\infty; -1[$ und $x \in \,]0; \infty[$ jeweils streng monoton fallend.

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1\cdot 2x - (x+1)\cdot 2}{4x^2} = \dfrac{-2}{4x^2} = -\dfrac{1}{2x^2} < 0$

$$f'(x) = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2x^2} = \frac{-1}{x\cdot(x+1)} \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x+1) = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f'(1) = g'(1) = -\frac{1}{2}$$

$f(1) = 1 \quad \Rightarrow g(1) = \ln f(1) = \ln 1 = 0$ Berührpunkte sind $P\left(1 \mid 1\right)$ und $Q\left(1 \mid 0\right)$.

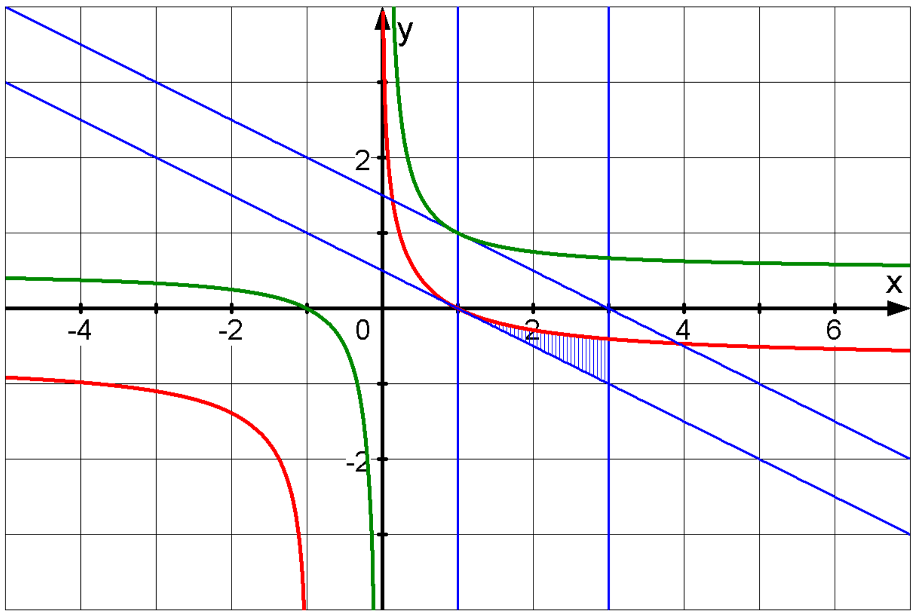
Tangente an G_f in P: $y = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)+1\ ) = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Tangente an G_g in Q: $y = \frac{1}{2}\cdot(x-1)+0 = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Nullstelle der Tangente in P: $-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

e)

x	-4	-2	0,1	4
g(x)	$-0{,}98$	$-1{,}39$	1,70	$-0{,}47$



f) Fläche des Parallelogramms: $A_P = 2$

$$\int_1^3 [g(x)]dx = \left[x\cdot g(x) - \ln(x+1)\right]_1^3 =$$

$$= \left(3\cdot g(3) - \ln(3+1)\right) - \left(1\cdot g(1) - \ln(1+1)\right) =$$

$$= 3\cdot\ln\frac{2}{3} + \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{16}{27}$$

$$\Rightarrow \quad \mathsf{A} = 1 - \left|\ln\frac{16}{27}\right| = 1 - \ln\frac{27}{16}$$

$$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}_P} = \frac{1-\ln\frac{27}{16}}{2} \approx 23{,}8\%$$

Grundkursabitur 2006	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Schar von Funktionen

$$f_a: x \to \frac{ax^2 - 5}{x^2}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von G_a und die zwei Nullstellen von f_a.

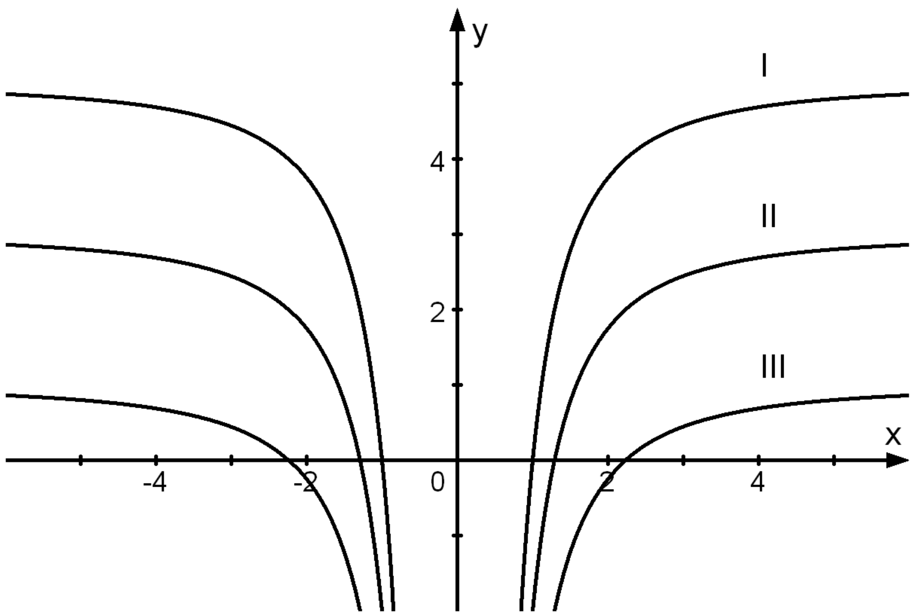
   b) Begründen Sie, dass $y = a$ Asymptote von G_a ist.

   Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an der Definitionslücke.

   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a.

   d) Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu ganzzahligen Parameterwerten a.

   Geben Sie an, zu welchem a die Graphen I, II und III jeweils gehören, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



---

2. a) Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die positive Nullstelle von f_a kleiner als 2,5 ist.

   Für diese Parameterwerte a schließen der Graph G_a, die Koordinatenachsen, die Asymptote $y = a$ und die Gerade $x = 2,5$ im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt A_a ein.

b) Markieren Sie diese Fläche für einen der Graphen in der Abbildung von Aufgabe 1.d). Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt A_a gilt:

$$A_a = 2{,}5a - \int_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} f_a(x)dx$$

c) Zeigen Sie: $A_a = 2\sqrt{5a} - 2$

Hinweis:

Für die Integration ist es hilfreich, den Term der Funktion f_a als Differenz darzustellen.

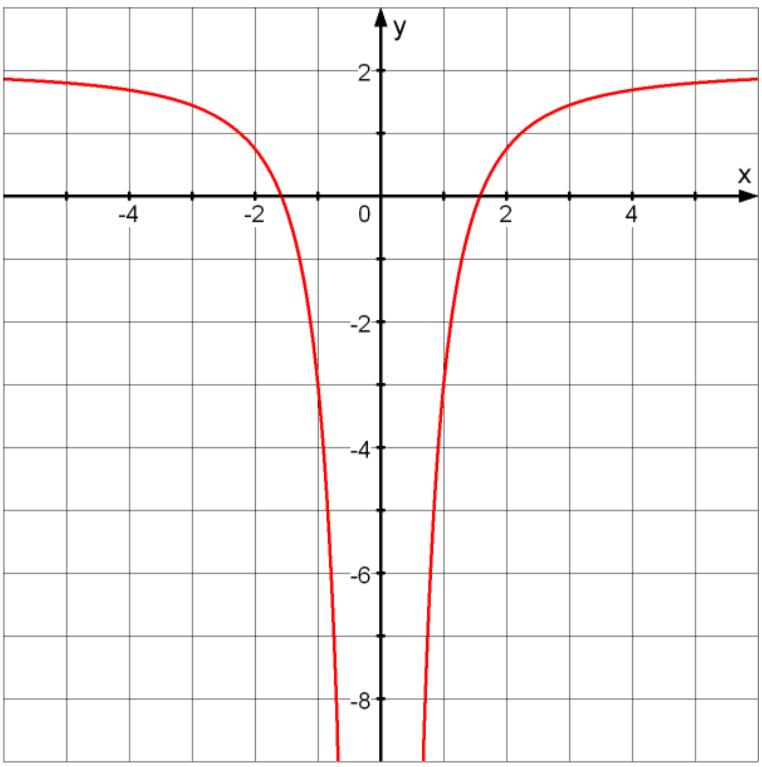
d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Parameterwerte a_1 und a_2 an, so dass sich die Flächeninhalte A_{a_1} und A_2 um $2\sqrt{5}$unterscheiden.

---

3. Nun sei $a = 2$. Die untenstehende Abbildung zeigt den zugehörigen Graphen.

Die Tangenten an in den Kurvenpunkten $P\left(1{,}25 \mid -1{,}2\right)$ und $Q\left(-1{,}25 \mid -1{,}2\right)$ schließen mit der Asymptote ein Dreieck ein.

Skizzieren Sie das Dreieck in die untenstehende Abbildung und berechnen Sie seinen exakten Flächeninhalt.



Lösung

1\. a) $f_a(-x) = \dfrac{a\cdot(-x)^2-5}{(-x)^2} = \dfrac{a\cdot x^2-5}{x^2} = f_a(x)$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a\cdot x^2-5}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot x^2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \dfrac{5}{a}$

$\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\dfrac{5}{a}} \vee x = \sqrt{\dfrac{5}{a}}$ sind die Nullstellen einer Scharfunktion von f_a.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a\cdot x^2-5}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(a - \dfrac{5}{x^2}\right) = a$

$y = a$ ist damit waagrechte Asymptote eines Schargraphen G_a.

$\lim\limits_{x \to 0\pm 0} \dfrac{a\cdot x^2-5}{x^2} = -\infty$, denn $\lim\limits_{x \to \pm 0} (a\cdot x^2 - 5) = -5$ und $\lim\limits_{x \to \pm 0} x^2 = 0+0$

Die y-Achse $x = 0$ ist waagrechte Asymptote des Graphen von f_a.

c) $f_a(x) = a - \dfrac{5}{x^2} = a - 5\cdot x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = -5\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \dfrac{10}{x^3}$

	$x<0$	$x>0$
$f_a'(x)$	$-$	$+$

f_a nimmt in $]-\infty; 0[$ streng monoton ab und in $]0; \infty[$ streng monoton zu.

d)

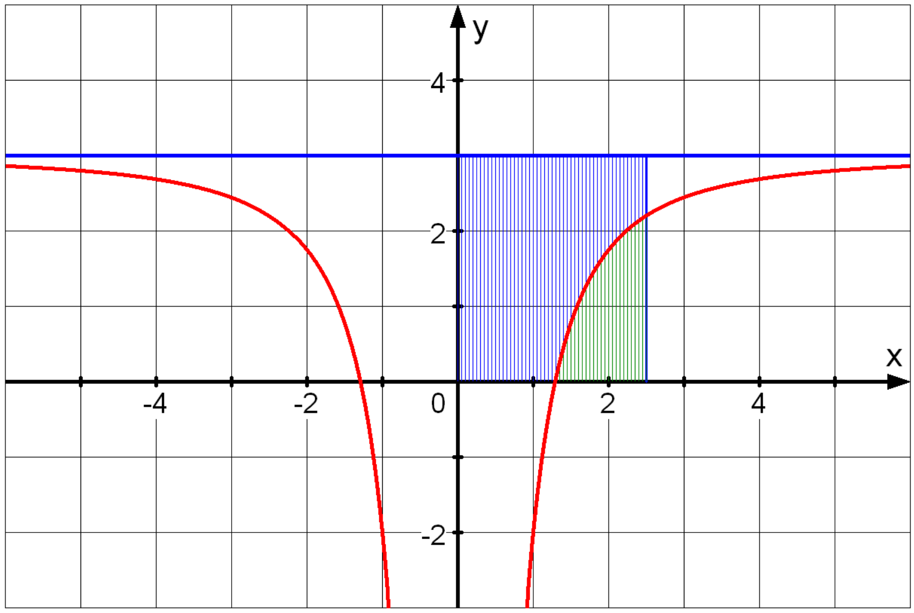
Nr.	I	II	III
	5	3	1

Begründung: Nullstellen und asymptotisches Verhalten

2\. a) $\sqrt{\dfrac{5}{a}} < 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5}{a} < \dfrac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad 4 < 5a \quad \Rightarrow \quad a > 0{,}8$

Scharfunktionen mit $a > 0,8$ haben eine positive Nullstelle, die kleiner als 2,5 ist.

b)



Fläche des Rechtecks: $A_R = 2{,}5 \cdot a$

Damit ergibt sich $A_a = 2{,}5a - \int\limits_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} f_a dx$

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} \left(a - \frac{5}{x^2}\right) dx = \left[ax + \frac{5}{x}\right]_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2{,}5} = \left(2{,}5a + 2\right) - \left(\sqrt{5a} + \sqrt{5a}\right) = 2{,}5a + 2 - 2\sqrt{5a}$$

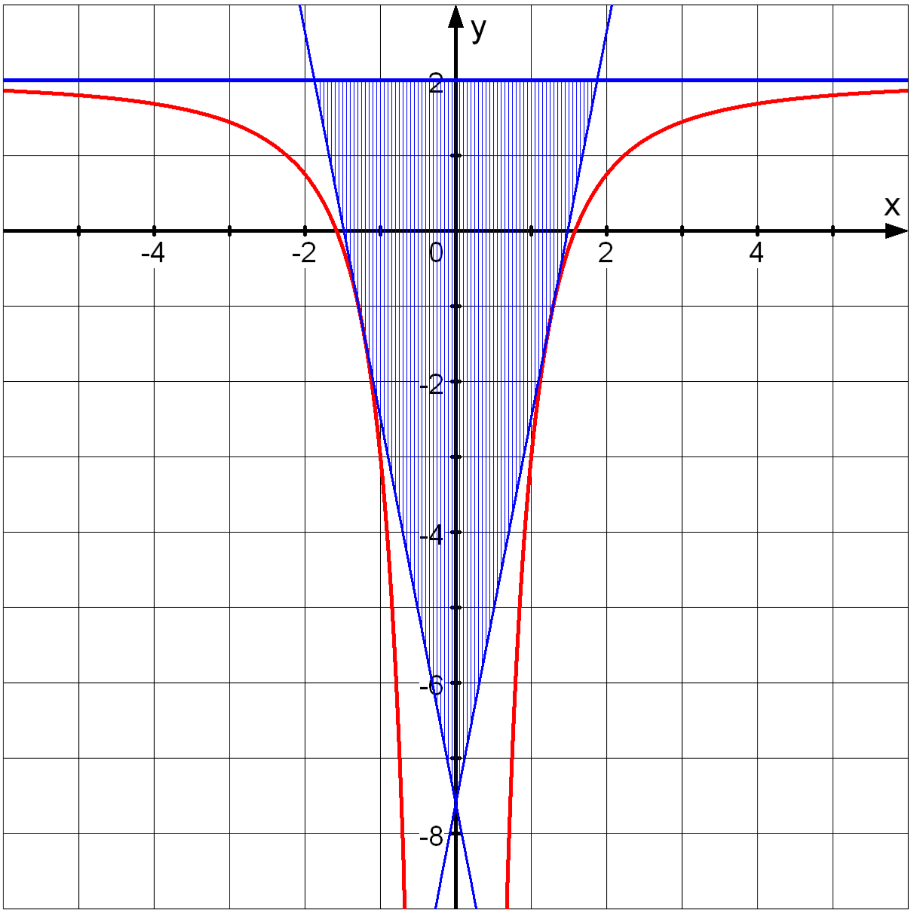
und damit $A_a = 2{,}5a - \left(2{,}5a + 2 - 2\sqrt{5a}\right) = 2\sqrt{5a} - 2$

d) $A_{a_1} - A_{a_2} = \left(2\sqrt{5a_1} - 2\right) - \left(2\sqrt{5a_2} - 2\right) = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} = 1$

$a_2 = 1$ und $a_1 = 4$

---

3. a)



Tangentengleichung in Q:

$$f_2'(1{,}25) = \frac{10}{1{,}25^3} = 5{,}12$$

$$x = 5{,}12 \cdot (x - 1{,}25) - 1{,}2 = 5{,}12x - 7{,}6$$

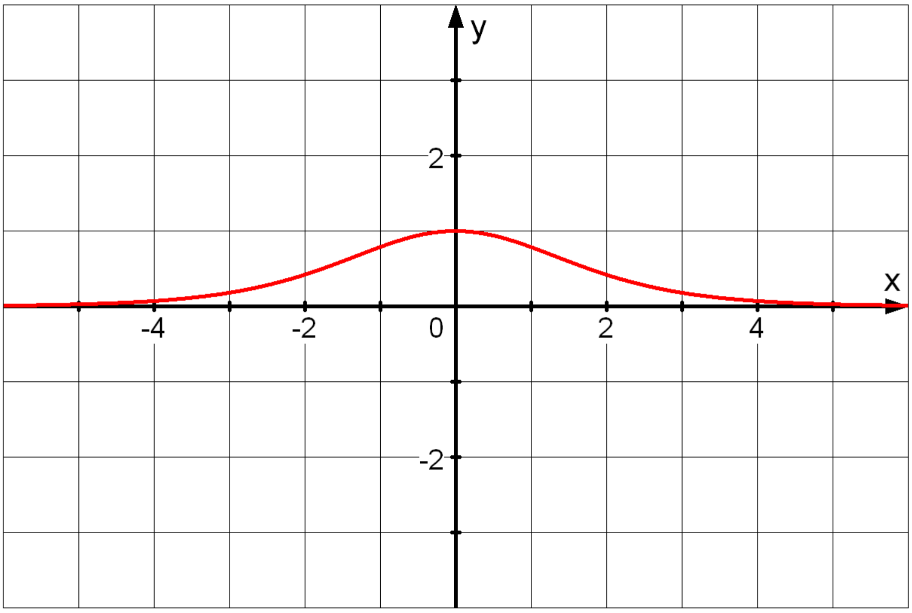
Schnitt mit der Geraden $y = 2$:

$$5{,}12x - 7{,}6 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}875$$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_D = 1{,}875 \cdot 9{,}6 = 18$

Grundkursabitur 2007	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \to \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.



a) Begründen Sie, dass G_f stets oberhalb der x-Achse verläuft und berechnen Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0$ Asymptote von G_f ist.

b) Erklären Sie, wie man mit Hilfe des Graphen G_f ohne Berechnung von f' näherungsweise Werte von f' an einzelnen Stellen ermitteln kann.

Bestimmen Sie auf die von Ihnen beschriebene Weise einen Näherungswert für $f'(1)$ auf eine Dezimale gerundet.

c) Die Funktion F mit $D_F = \mathbb{R}$ hat die Form $F(x) = \dfrac{c}{e^x+1}$ und ist eine Stammfunktion von f.

Bestimmen Sie die Konstante c.

d) Bestimmen Sie $F(0)$ und sowie das Verhalten von F an den Rändern von D_F.

Begründen Sie, dass F streng monoton zunehmend in D_F ist.

e) Tragen Sie die Tangente an den Graphen von F im Punkt $P\left(0 \mid F(u)\right)$ in untenstehendes Koordinatensystem ein und skizzieren Sie anschließend den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in diese Abbildung.

f) Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden $x = -u$ und $x = u$, $u > 0$, schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein.

Bestimmen Sie $\lim\limits_{u \to \infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

---

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

Jahr	1991	1993	1995	1997	1999
Anzahl in Mio.	0,5	1,8	3,8	8,3	23,4

Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form

$N(x) = a \cdot e^{bx}$

beschreiben. N(x) ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren.

Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999.

Runden Sie b auf zwei Dezimalen.

b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes N(x) für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert.

Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007?

Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.

c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln.

Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.

Lösung

1. a) $e^x > 0$ und $(e^x + 1)^2 > 0$ ergibt $f(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

$$f(0) = \frac{4 \cdot e^0}{(e^0 + 1)^2} = \frac{4}{(1 + 1)^2} = 1 \text{ und damit ergibt sich } S_y\left(0 \mid 1\right).$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{e^x + 2 + \frac{1}{e^x}} = 0$$

Die x-Achse $y = 0$ ist Asymptote des Graphen vonf.

b) Man zeichnet näherungsweise Tangenten ein und bestimmt deren Steigung.

Es ergibt sich $f'(1) \approx -0{,}4$

c) $F'(x) = \dfrac{0 \cdot (e^x + 1) - c \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{-c \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \Rightarrow \quad c = -4$

d) $F(0) = \dfrac{-4}{e^0 + 1} = \dfrac{-4}{1 + 1} = -2$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{e^x + 1} = -4 \text{ da } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{e^x + 1} = 0 - 0 \text{ da } \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

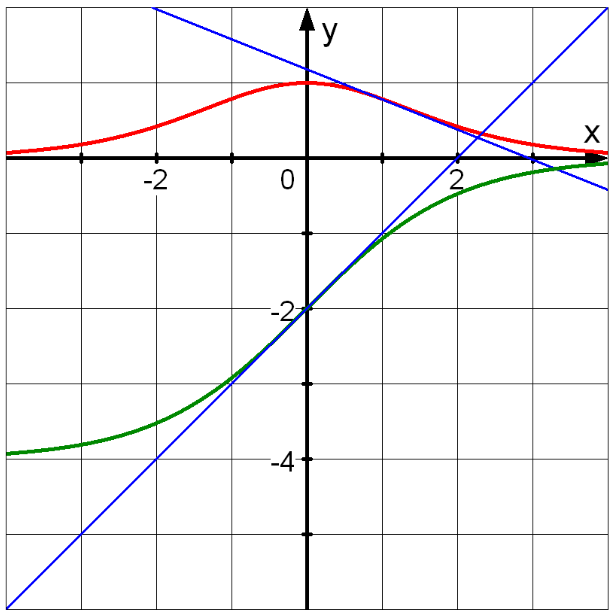
Aus $F'(x) = f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass F in D_F streng monoton zunehmend ist.

e) $F'(0) = f(0) = 1$

f) $A(u) = \displaystyle\int_{-u}^{u} f(x)dx = \left[\frac{-4}{e^x + 1}\right]_{-u}^{u} = \frac{-4}{e^u + 1} - \frac{-4}{e^{-u} + 1}$

und damit ist $\lim\limits_{u \to \infty} A(u) = 4$

Die nach beiden Seiten hin unendlich ausgedehnte Fläche zwischen G_f und der x-Achse hat den Inhalt 4.



---

2. a) $0{,}5 = a\cdot e^{0} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}5$ und $23{,}4 = 0{,}5\cdot e^{b\cdot 8} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{8}\cdot \ln 46{,}8 \approx 0{,}48$

b) $N(4) = 0{,}5\cdot e^{0.48\cdot 4} \approx 3{,}41$

Prozentuale Abweichung: $\frac{3{,}8-3{,}41}{3{,}8} \approx 0{,}103 = 10{,}3\%$

$N(16) = 0{,}5\cdot e^{0.48\cdot 16} \approx 1082$

Es ergibt sich ein sehr unrealistischer Wert!

$1 = 0{,}5\cdot e^{0{,}48\cdot x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\ln 2}{0{,}48} \approx 1{,}44$

c) Sei T die Verdoppelungszeit.

$e^{0{,}48\cdot T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln 2}{\ln 0{,}48} \approx 1{,}44$

Grundkursabitur 2007	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon x \to \frac{x^2-3}{x^2-9}$$

mit maximalem Definitionsbereich D_f. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_f, die Nullstellen von f und das Symmetrieverhalten von G_f an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_f an.

c) Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extrempunkts E von G_f.

d) Berechnen Sie f(2,5) sowie f(4) und skizzieren Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-7 \le x \le 7$.

---

2. a) $F\colon x \to x + \ln\frac{3-x}{x+3}$ ist Stammfunktion von f im maximalen Definitionsbereich D_F.

Ein Nachweis ist dafür ist nicht erforderlich.

Zeigen Sie, dass $D_F =]-3; 3[$ der maximale Definitionsbereich von F ist.

Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die G_f mit der x-Achse einschließt, auf zwei Dezimalen genau.

b) Begründen Sie, beispielsweise mit Hilfe von Flächenbetrachtungen, dass die Integralfunktion

$$F_0\colon x \to \int_0^x f(t)dt$$

im Intervall $]-3;. 3[$ drei Nullstellen hat.

Hinweis: Die Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

---

3. Betrachtet werden nun Funktionen der Form

$$f_{a,b}\colon x \to \frac{x^2-a}{x^2-b}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$ im jeweils maximalen Definitionsbereich.

Ihre Graphen werden mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

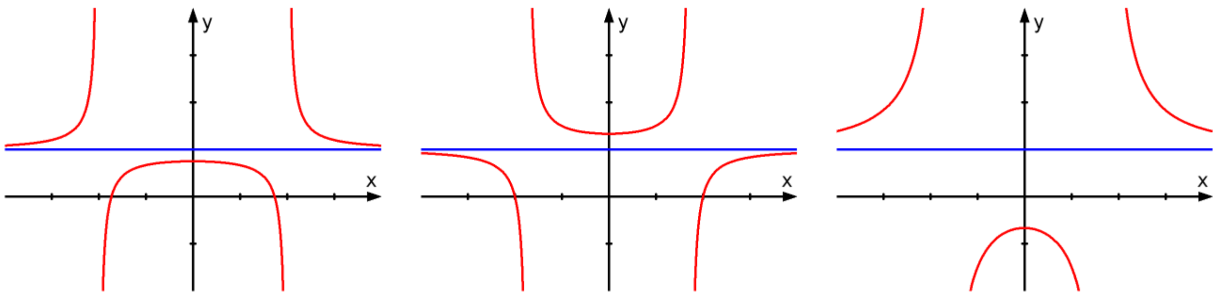
Beispielsweise erhält man für $a = 3$ und $b = 9$ obige Funktion f.

a) Was muss für b gelten, damit $f_{a,b}$ in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

Geben Sie die Zahl der Nullstellen in Abhängigkeit von a an.

b) Einer der drei abgebildeten Graphen $G_{a,b}$ gehört zum Fall $0 < b < a$.

Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen für den Fall $0 < b < a$ nicht in Betracht kommen.



Lösung

1. a) Maximale Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$

Nullstellen: $x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

Symmtrieverhalten: G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+0} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \infty$ weil $\lim\limits_{x \to 3+0} (x^2-3) = 6$ und $\lim\limits_{x \to 3+0} (x^2-9) = 0+0$

$\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} \frac{x^2-3}{x^2-9} = -\infty$ weil $\lim\limits_{x \to 3-0} (x^2-3) = 6$ und $\lim\limits_{x \to 3-0} (x^2-9) = 0-0$

Wegen der Achsensymmetrie des Graphen folgt

$\lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = \infty$

Waagrechte Asymotote: $y = 1$

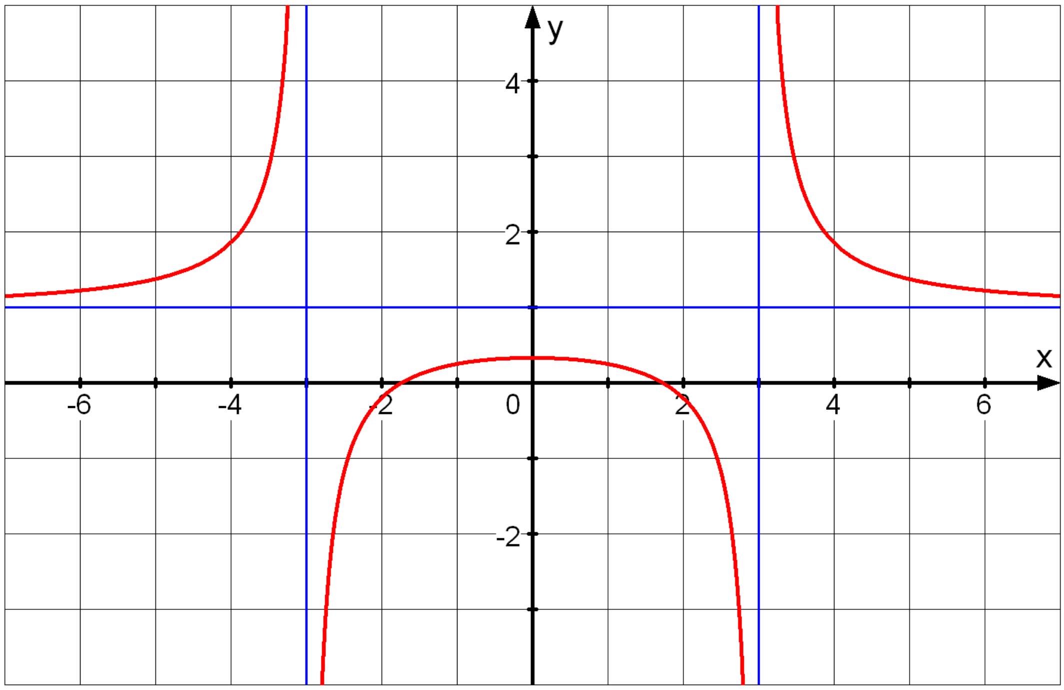
Senkrechte Asymptoten: $x = -3$ und $x = 3$

c) $f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-9) - (x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-12x}{(x^2-9)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$	+	+	−	−

$E\left(0 \mid \frac{1}{3}\right)$ ist ein Hochpunkt.

d) $f(2{,}5) \approx -1{,}2$ und $f(4) \approx 1{,}9$



---

2. a) Damit F definiert ist, muss $\frac{3-x}{x+3} > 0$ gelten.

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Also $D_F =]-3; 3[$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^2+3}\,dx = \left[x + \ln\frac{3-x}{x+3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \ln\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \approx 0{,}415$$

$A \approx 0{,}83$

b) Es ist $F_0 = 0$.

Ferner kommt es im Intervall $]0; 3[$ und damit auch im Intervall $]-3;0[$ einemal zum Fächenausgeich der über- und unterhalb der x-Achse liegenden Flächen.

---

3. a) b muss kleiner als Null sein.

a	< 0	$a = 0$	$a > 0$
Anzahl der Nullstellen	0	1	2

b) Der Graph $G_{a,b}$ muss zwei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen und der Schnittpunkt mit der positiven x-Achse muss rechts von den senkrechten Asymptoten liegen**.**

Nur der Graph in Abb. 2 erfüllt diese Bedingunge.

Grundkursabitur 2008	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

Gegeben ist die Funktion $f : x \to \frac{8x}{x^2+4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Nullstelle von f an.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f.

   c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Ursprung.

   Berechnen Sie f(1) und f(6) und skizzieren Sie den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-6 \le x \le 6$.

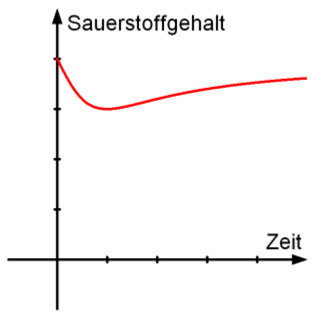
   b) Begründen Sie, dass f im Intervall $\left[-2; 2\right]$ umkehrbar ist. Tragen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.c) ein.

   Die Funktion $F : x \to 4 \cdot \ln(x^2+4)$ mit $D_F = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

   e) Der Graph von f und der Graph der Umkehrfunktion g schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieses Flächenstücks.

---

2. Unmittelbar nach der einmaligen, kurzzeitigen Einleitung von Abwasser in einem See kommt es zu einem Absinken des Sauerstoffgehalts im See.



   Da die Abwasserbelastung nicht zu hoch ist, führt die Selbstreinigung des Sees schließlich wieder zu einer Erhöhung des Sau erstoffgehalts.

   Die Funktion

   $h : x \to 8 - f(x),\ D_h = \mathbb{R}_0^+,$

   beschreibt näherungsweise den Sauerstoffgehalt des Sees an der Einleitungsstelle.

   Dabei ist x die Anzahl der seit Einleitung des Abwassers vergangenen Tage, h(x) die Maßzahl des Sauerstoffgehalts in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

   Die Abbildung veranschaulicht den Verlauf des Graphen von h.

   a) Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f hervorgeht.

Nach wie vielen Tagen erreicht der Sauerstoffgehalt einen kleinsten Wert und wie hoch ist dieser?

b) Berechnen Sie, wann der Sauerstoffgehalt wieder auf 95% des ursprünglichen Wertes angestiegen ist.

c) Der mittlere Sauerstoffgehalt (in $\frac{mg}{l}$) an der Einleitungsquelle ist für einen Zeitraum von 20 Tagen nach Einleitung des Abwassers gegegeben durch $\frac{1}{20}\int_0^{20} h(x)dx$.

Bestimmen Sie damit den mittleren Sauerstoffgehalt für diesen Zeitraum.

Lösung

1. a) $f(-x) = \dfrac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+4} = -\dfrac{8x}{x^2+4} = -f(x)$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $O\left(0;\,0\right)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x+\frac{4}{x}} = 0+0$$

Wegen der Punktsymmetrie des Graphen gilt dann

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0$$

Nullstelle von f: $x = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{8\cdot(x^2+4)-8x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{32-8x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -2 \vee x = 2$

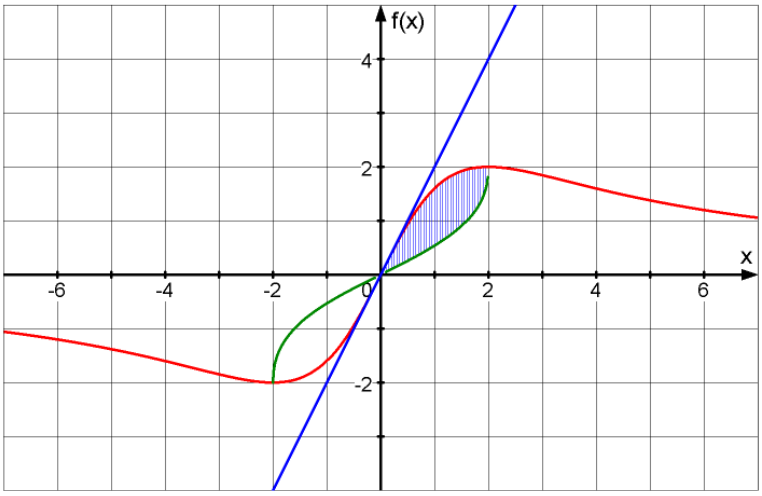
Monotonieverhalten von f :

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$32-8x^2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+4)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	smf	sms	smf

Also ist $T\left(-2 \mid -2\right)$ ein Tiefpunkt und $H\left(2 \mid 2\right)$ ein Hochpunkt des Graphen.

c) $f'(0) = 2$ und damit ist $t_0 : y = 2x$ die Tangente im Ursprung.

$f(1) = 1{,}6$ und $f(6) = 1{,}2$



d) Man berechnet zunächst den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im I. Quadranten mit der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten einschließt.

Die gesuchte Fläche ist dann doppelt so groß.

$$A_1 = \int_0^2 \left(\frac{8x}{x^2+2} - x\right)dx = \left[4 \cdot \ln(x^2+4) - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4 \cdot \ln 8 - 2 - 4 \cdot \ln 4 = 4\ln 2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad A = 8 \cdot \ln 2 - 4 = 4 \cdot (2 \cdot \ln 2 - 1)$$

Beachte:

$\int \frac{8x}{x^2+2}dx$ lässt sich mit logarithmischer Integration berechnen:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C}$$

Dazu ist allerdings die Umformung $\int \frac{8x}{x^2+2}dx = 4 \cdot \int \frac{2x}{x^2+2}dx$ notwendig.

---

2. a) Man erhält den Graphen von h durch Einschränkung der Funktion f auf $\mathbb{R}_0^+$, Spiegelung des Graphen der so erhaltenen Funktion an der x-Achse und anschließende Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der niedrigste Sauerstoffgehalt wird nach zwei Tagen erreicht. Er beträgt dann 6 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.

b) $8-\dfrac{8x}{x^2+4} = 0{,}95\cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad 7{,}6x^2+8x+22{,}4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10+4\sqrt{6} \approx 19{,}8$

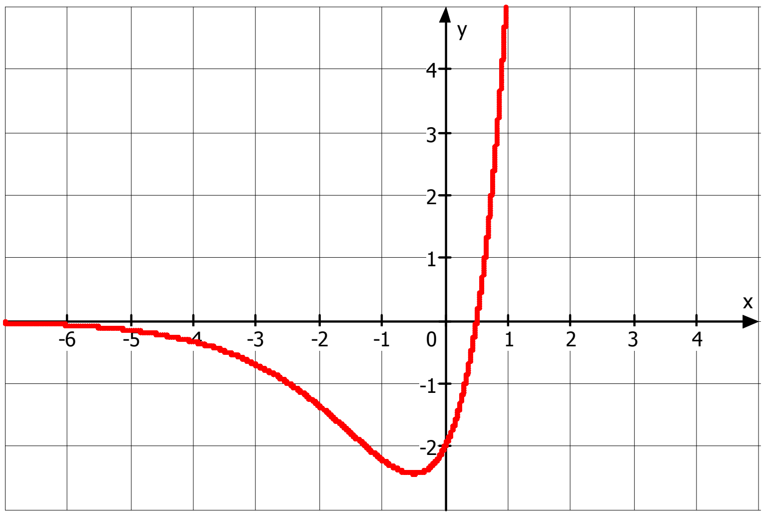
Der Sauerstoffgehalt ist nach 19,8 Tagen wieder auf 95% seines ursprünglichen Wertes angestiegen.

c) $\displaystyle\int_0^{20} h(x)dx = \Big[8x-4\cdot\ln(x^2+4)\Big]_0^{20} = 160-4\cdot\ln 404+4\cdot\ln 4 = 160-4\cdot\ln 101$

Durchschnittlicher Sauerstoffgehalt : $\dfrac{1}{20}\cdot\left(160-4\cdot\ln 101\right) \approx 7{,}08 \ \left(\dfrac{mg}{l}\right)$

Grundkursabitur 2008	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der Funktion $g: x \to (4x-2)\cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$.



1. a) Berechnen Sie die Nullstelle von g.

G_g besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie dessen Koordinaten.

b) Weisen Sie nach, dass G_g genau einen Wendepunkt besitzt und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. Tragen Sie diese in obige Abbildung ein.

c) Gegeben ist die Integralfunktion $I: x \to \int_0^x g(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Für verschiedene Werte von x wird jeweils das Vorzeichen von I(x) betrachtet.

Was kann hierüber ohne Rechnung im Bereich $0 < x \le 0{,}5$ ausgesagt werden, was im Bereich $x > 0{,}5$?

Begründen Sie ihre Antwort, ohne eine integralfreie Darstellung von I zu verwenden.

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion

$h: x \to (-4x-2)\cdot e^{-2x}$

mit Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}$ und zugehörigem Graph G_h

2. a) Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h, dass man G_h erhält, indem man G_g an der y-Achse spiegelt.

Geben Sie auch die Gleichung der Wendetangente von G_h an.

b) Die Funktion $G: x \to (2x-2)\cdot e^{2x}$ mit $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich.

Die Schnittpunkte der Graphen G_g bzw. G_h mit der x-Achse werden mit N bzw. M bezeichnet.

Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von der Strecke $\left[MN\right]$ sowie den Graphen G_g und G_h eingeschlossen wird.

$\left(\text{Hinweis : } G_g \text{ und } G_h \text{ schneiden sich nur auf der } y-\text{Achsse.}\right)$

---

3. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_a: x \to (2ax-2)\cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h Funktionen der Schar sind, indem Sie die zuge. hörigen Parameterwerte a angeben.

Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden.

b) Jede Funktion der Schar hat genau eine Wendestelle und zwar bei $x = -\frac{1}{a}$ (Nachweis nicht erforderlich).

Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen p zur x-Achse liegen, und geben Sie die Gleichung von p an.

c) Die Wendetangente jedes Graphen der Schar schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Für bestimmte Werte von a ist dieses Dreieck gleichschenklig.

Beschreiben Sie einen Weg, um diese Werte von a rechnerisch zu ermitteln (Rechnungen sind nicht erforderlich).

Lösung

1. a) $g(x) = (4x-2)\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

$g'(x) = 4\cdot e^{2x} + (4x-2)\cdot e^{2x}\cdot 2 = 8x\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$g(0) = (4\cdot 0-2)\cdot e^{2\cdot 0} = -2\cdot 1 = -2$

Die Koordinaten des Tiefpunkts sind also $T\left(0 \mid 2\right)$.

b) $g''(x) = 8\cdot e^{2x} + 8x\cdot e^{2x}\cdot 2 = (8+16x)\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Krümmungsverhalten :

	$-\infty < x < -0{,}5$	$-0{,}5 < x < \infty$
$8+16x$	$-$	$+$
e^{2x}	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	$+$
	RK	LK

$W\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{4}{e}\right)$ ist also der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

$g'(-0{,}5) = -4\cdot e^{-1} = -\frac{4}{e}$

Wendetangente $w : y = -\frac{4}{e}\cdot(x+0{,}5) - \frac{4}{e} = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$

c) $I : x \to \int_0^x g(t)dt$

I ist für $0 < x \leq 0{,}5$ negativ,

da die Integration nach rechst verläuft und der Integrand für $0 < x < 0{,}5$ negativ ist.

Für $x > 0{,}5$ kommt es für ein $x_0 > 0{,}5$ zum Flächenausgleich und I wird positiv um es dann auch zu bleiben.

---

2. a) $g(-x) = \left[4\cdot(-x)-2\right]\cdot e^{2\cdot(-x)} = (-4x-2)\cdot e^{-2x} = h(x)$

Also liegen der Graph von h und der Graph von g achsensymmetrisch zur y-Achse.

$w' : y = \frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$

Ist f: $x \to f(x)$ eine Funktion mit dem Graphen G_f, dann erhält man den Graphen von

1. f_1: $x \to -f(x)$ durch Spiegelung von G_f an der x-Achse.

2. f_2: $x \to f(-x)$ durch Spiegelung von G_f an der y-Achse-.

3. f_3: $x \to -f(-x)$ durch Spiegelung von G_f am Koordinatenursprung $O\left(0 \mid 0\right)$.

4. f_4: $x \to f(x-a)+b$ durch Verschiebung von G_f mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

5. f_5: $x \to f(ax)$ durch eine orthogonale Affinität von G_f entlang der x-Achse.

6. f_6: $x \to a \cdot f(x)$ durch eine orthogonale Affinität von G_f entlang der y-Achse.

b) $\int_0^{0,5} g(x)dx = \left[(2x-2) \cdot e^{2x}\right]_0^{0,5} = (1-2) \cdot e - (0-2) \cdot 1 = 2 - e$

$A = 2 \cdot (e-2) = 2e - 4$

---

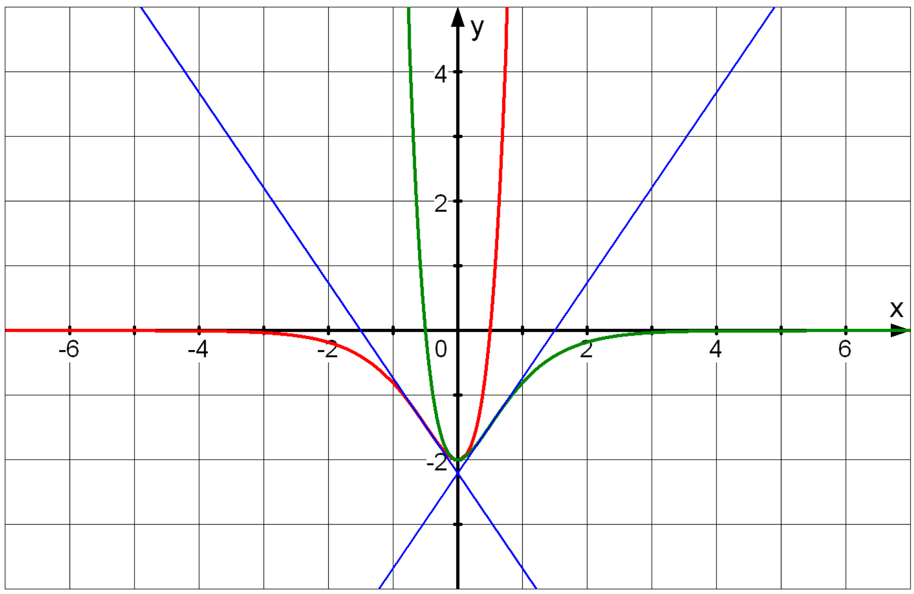
3. $f_a(x) = (2ax-2) \cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

a) $g(x) = f_2x)$ und $h(x) = f_{-2}(x)$

$f_a(0) = (0-2) \cdot e^0 = -2$

b) $f_a(-\frac{1}{a}) = \left[2a \cdot (-\frac{1}{a}) - 2\right] \cdot e^{a \cdot (-\frac{1}{a})} = -\frac{4}{e}$ ergibt $p : y = -\frac{4}{e}$

c) Der Betrag der Nullstelle der Wendetangente muss gleich dem Betrag des y-Abschnitts der Wendetangente sein.

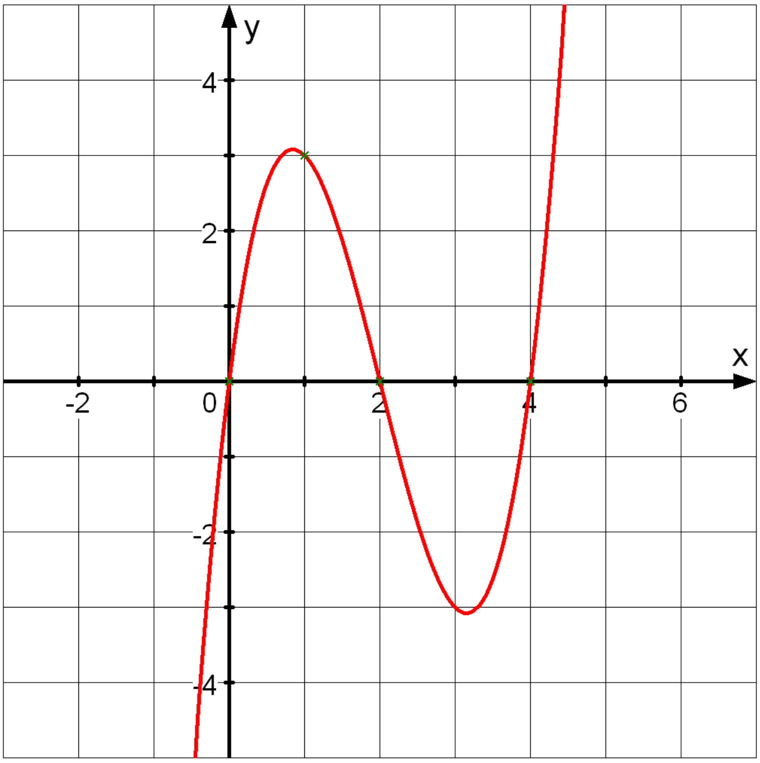


y
4
2
x
-6
-4
-2
0
2
4
6
-2

Grundkursabitur 2009	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

   Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|\,3)$, $N_1(0|\,0)$, $N_2(2|\,0)$ und $N_3(4|\,0)$ sind Punkte von G_f.



   a) Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form

   $$f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$$

   an, indem Sie passende Werte für a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ ermitteln.

   Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

   b) Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und eimitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

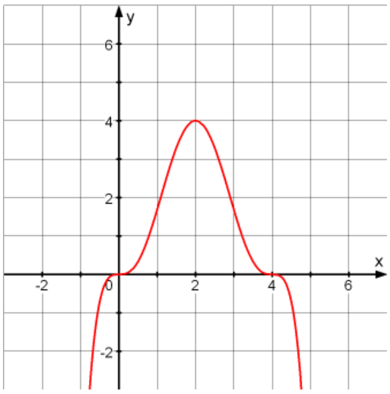
   c) Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

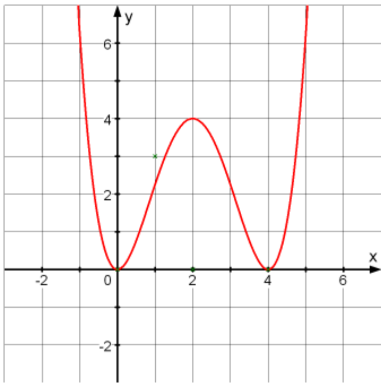
   Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

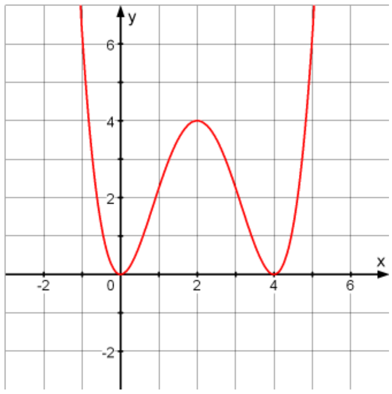
   Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \to \int_0^x f(t)dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

d) Berechnen Sie F(4). Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der GraphG_f mit der x-Achse im 1. und im IV. Quadranten einschließt ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.







e) Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.

f) Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f.

Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

---

2. In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt.

Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind. Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse.

Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod-123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k > 0$ beschreiben.

Dabei gibt m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.

a) Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k.

b) Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden ?

Wie lange dauert es, bis 90% der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Lösung

1. a) $f(x) = a\cdot(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-4) = a\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x-4)$

P(1| 3) eingesetzt ergibt $3 = a\cdot(1-2)\cdot(1-4) \quad\Leftrightarrow\quad a = 1$

Damit $f(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x-4) = x^3-6x^2+8x$

b) $f'(x) = 3x^2-12x+8 \quad f''(x) = 6x-12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2 \quad f'''(x) = 6 \neq 0$

$N_2(2|\,0)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

$f'(2) = -4$ ergibt die Wendetangente $y = -4\cdot(x-2) = -4x+8$

c) Winkel bei N_2 : $\tan\alpha = \frac{8}{2} = 4 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 76°$

Die anderen Winkel messen 90° und 14°.

d) $F(4) = \int_0^4 (x^3-6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^4 = 64-128+64 = 0$

Die zwei Flächenstücke, die der Graph von f mit der x-Achse einschießt, sind gleich groß.

$F(2) = \int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2 = 4-16+16 = 4$

Beide Flächenstücke sind zusammen 8 FE groß.

e) Graph I : Nicht der Graph von F, da $F(x) > 0$ für $x < 0$ sein muss.

Graph III : Nicht der Graph von F, da F zwischen 0 und 4 nur eine Extremstelle hat.

f) Die untere Grenze ist Nullstelle jeder Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

$F_1(x) = F(x)+1$ ist Stammfunktion, aber keine Integralfunktion, da sie keine Nullstelle besitzt.

---

2. a) $\frac{1}{2}m_0 = m_0\cdot e^{-k\cdot 13,2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2} = e^{-13,2\cdot k} \quad\Leftrightarrow\quad -13,2\cdot k = \ln\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k = \frac{\ln 2}{13,2}$

$k \approx 0,525$

b) $\frac{m(4)}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{13,2}\cdot 4} \approx 0,81$

Nach 4 Stunden sind noch ca. 81% des verabreichten Jods vorhanden.

$0,1m_0 = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{13,2}\cdot t} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{\ln 2}{13,2}\cdot t} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\ln 2}{13,2}\cdot t = \ln 0,1$

$\Rightarrow \quad t = -13,2 \cdot \frac{\ln 0,1}{\ln 2} \approx 44$

Nach ca. 44 h sind 90% der radioaktiven Jods zerfallen.

Grundkursabitur 2009	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow x \cdot e^{2-x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(0| f(0))$.

   c) Untersuche Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f an.

   d) Berechnen Sie f(0,5) und f(5). Zeichnen Sie die Tangente t und den Graphen G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ei,.

(Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende : $-7 \leq y \leq 9$)

---

2. a) Ermitteln Sie durch Betrachtung einer jeweils geeigneten Dreiecks oder Trapezfläche grobe Näherungswerte für $\int_0^1 f(x)dx$ und $\int_1^5 f(x)dx$.

   b) Betrachtet wird die Integralfunktion: $I : x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ für $x \in \mathbb{R}$:

   Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung der Funktion I Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von 1.

   Skizzieren Sie unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere auch der Näherungswerte aus Aufgabe 2.a) den Graphen von I in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe l.d).

---

3. Gegeben ist nun zusätzlich die Schar der Geraden $g_a$mit den Gleichungen $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R}$.

   a) Jede Gerade g_a hat mit G_f den Ursprung gemeinsam (kein Nachweis erforderlich).

   Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte des Parameters a es einen zweiten Punkt gibt, die die Gerade g_a mit G_f gemeinsam hat.

   Geben Sie die x-Koordinate x_S dieses Punktes in Abhängigkeit von a an.

b) $F : x \rightarrow (-x-1)\cdot e^{2-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit der Geraden g_a m für $a = 1$ einschließt.

c) G_f und die x-Achse schließen im I. Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück ein, das den endlichen Flächeninhalt e^2 besitzt (Nachweis nicht erforderlich).

Für ein, bestimmtes a_0 teilt die Gerade g_{a_0} dieses Flächenstück in zwei inhaltsgleiche Teilstücke.

Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von a_0 an.

Lösung

1. a) $x = 0$ ist inzige Nullstelle von f.

$$\lim_{x \to \infty} x\cdot e^{2-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^2\cdot x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{2-x} = -\infty$$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (1-x) \cdot e^{2-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

$f''(x) = -1 \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2) \cdot e^{2-x}$

$f''(1) = (1-2) \cdot e^{2-1} = -e < 0$

Also ist E(1|e) ein Hochpunkt des Graphen.

$f'(0) = e^2$ und damit ist $y = e^2 \cdot x$ die Gleichung der Tangente im Punkt P.

c) $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Krümmungsverhalten von f

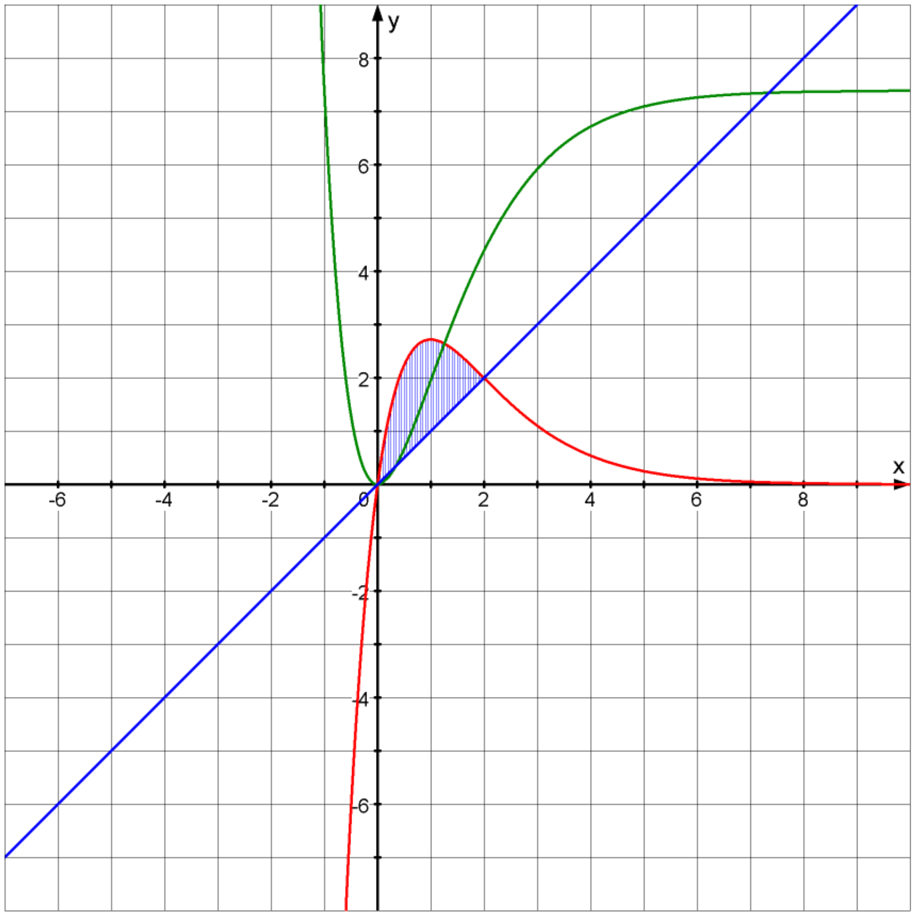
	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
	Rechtskrümmung	Rechtskrümmung

Mithin ist W(2| 2) der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

d) Der Ursprung ist TP des Graphen von I.

Begründung : $f(0) = 0$ mit VZW von $-$ nach $+$ und $I(0) = 0$

$f(-0,5) = -0,5 \cdot e^{2,5} \approx -6,1$ und $f(5) = 5 \cdot e^{-3} \approx 0,25$



---

2. a) $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e = \frac{e}{2} \approx 1{,}4$ und $\int_1^5 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\cdot(e+\frac{5}{e^3})\cdot 4 \approx 5{,}9$

b) $I(0) = 0$ und $I(1) \approx 1{,}4$ und $I(5) = 7{,}3$

$H\left(0\,|\,0\right)$ ist Tiefpunkt von des Graphen von I.

Begründung: $x = 0$ ist Nullstelle von f und Vorzeichenverhalten von f.

---

3. Gegeben : $g_a \,.\; y = ax$

a) $ax = x\cdot e^{2-x} \quad\Leftrightarrow\quad x\cdot(a-e^{2-x}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \;\vee\; e^{2-x} = a$

$\Leftrightarrow\quad x = 0 \;\vee\; x = 2-\ln a$ falls $a > 0$.

Gleichheit der Lösungen: $2-\ln a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = e^2$

Falls $a > 0$ und $a \neq e^2$, dann gibt es zwei Schnittpunkte.

Der zweite Schnittpunkt hat die x-Koordinate $2-x = \ln a \quad\Leftrightarrow\quad x = 2-\ln a$

b) $\mathsf{A} = \int_0^2 [f(x) - x]dx = \left[(-x-1)\cdot e^{2-x} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = (-3-2) - (-e^2) = e^2 - 5$

c) $\int_0^{2-\ln a} [f(x) - ax]dx = \frac{1}{2}e^2$

Grundkursabitur 2010	Infinitesimalrechnung	Aufgabe I

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen

$$f_k : x \to 1 - \frac{2k}{e^x + k}$$

mit dem maximalen Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. a) Geben Sie den Definitionsbereich D_k an. Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_k an.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_k.

c) Zeigen Sie, dass G_k die x-Achse nur im Punkt $S_k\left(\ln k \mid 0\right)$ schneidet. Die Tangente an G_k im Punkt S_k wird mit t_k bezeichnet.

Begründen Sie, dass alle Tangenten t_k parallel zueinander sind.

d) Zeigen Sie, dass sich die Graphen G_1 und G_8 nicht schneiden.

e) Berechnen Sie $f_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_8(1)$ und $f_8(3)$.

Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_8, deren Asymptoten sowie die Tangenten t_1 und t_8 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

f) Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der x-Achse ein Graph G_k verläuft.

g) Zeigen Sie, dass die Funktion F_k: $x \to 2 \cdot \ln(e^x + k) - x$ mit $x \in D_k$ eine Stammfunktion von f_k ist.

h) G_k und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück.

Berechnen Sie dessen Inhalt.

---

2. Lässt man für den Parameter k auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen G_k mit $k \in \mathbb{R}^-$ von den Graphen G_k mit $k \in \mathbb{R}^+$.

Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung

1. a) $D_k = \mathbb{R}$, da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2k}{e^x + k}\right) = 1 - 2 = -1, \text{ da } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

G_k besitzt für $x \to -\infty$ die waagrechte Asymptote $y = -1$.

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2k}{e^x + k}\right) = 1, \text{ da } \lim_{x \to \infty} e^x = \infty \text{ und damit } \lim_{x \to \infty} \frac{2k}{e^x + k} = 0.$$

G_k besitzt für $x \to \infty$ die waagrechte Asymptote $y = 1$.

b) $f_k'(x) = -\dfrac{0 \cdot (e^x + 1) - 2k \cdot e^x}{(e^x + k)^2} = \dfrac{2k \cdot e^x}{(e^x + k)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

G_k ist also auf ganz $D_k = \mathbb{R}$ streng monoton steigend.

c) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2k}{e^x + 1} = 0 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{2k}{e^x + k} \Leftrightarrow e^x + k = 2k \Leftrightarrow e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k$

und damit ist $S_k\left(\ln k \mid 0\right)$ der einzige Schnittpunkt eines Schargraphen mit der x-Achse.

Steigung der Tangente in S_k: $f_k'(\ln k) = \dfrac{2k \cdot e^{\ln k}}{(e^{\ln k} + k)^2} = = \dfrac{2k \cdot k}{(k + k)^2} = \dfrac{2k^2}{4k^2} = \dfrac{1}{2}$

Alle Tangenten haben die gleiche Steigung und sind daher parallel.

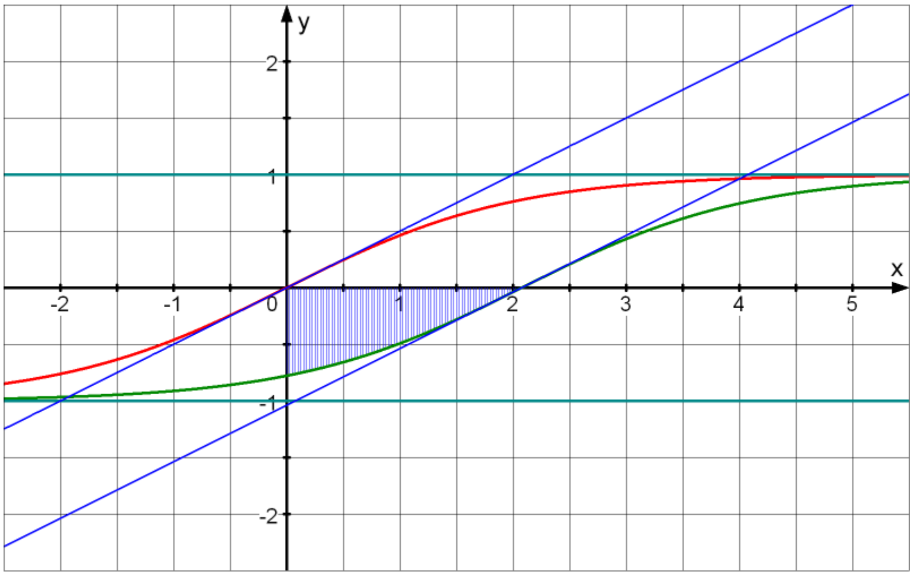
f) $f_1(x) = f_8(x) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{16}{e^x + 8} \Leftrightarrow \dfrac{2}{e^x + 1} = \dfrac{16}{e^x + 8}$

$\Leftrightarrow 2e^x + 16 = 16e^x + 16 \Leftrightarrow e^x = 0$

Die letzte Gleichung besitzt keine Lösung. Also schneiden sich die beiden Graphen nicht.

e) $f_1(-1) = 1 - \dfrac{2}{e^{-1} + 1} \approx -0{,}46$ und $f_1(1) = 1 - \dfrac{2}{e + 1} \approx 0{,}46$

$f_8(1) = 1 - \dfrac{16}{e + 8} \approx -0{,}49$ und $f_8(3) = 1 - \dfrac{16}{e^3 + 8} \approx 0{,}43$



f) Die Schnittpunkte der Graphen G_k mit der x-Achse sind gegeben durch $S_k\left(\ln k \mid 0\right)$.

Da die ln-Funktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat, ist jeder Punkt der x-Achse Schnittpunkt eines Schargraphen mit der x-Achse.

Ist der Schnittpunkt mit der x-Achse gegeben durch $S\left(x_0 \mid 0\right)$, dann schneide der zu

$k = e^{x_0}$ gehören Schargraph die x-Achse in S.

g) $F_k'(x) = 2\cdot\frac{e^x}{e^x+k} - 1 = \frac{2e^x-(e^x+k)}{e^x+k} = \frac{e^x-k}{e^x+k} = \frac{e^x+k-2k}{e^x+k} = \frac{e^x+k}{e^x+k} - \frac{2k}{e^x+k} =$

$= 1 - \frac{2k}{e^x+k}$

h) $\int_0^{\ln 8}(x - \frac{16}{e^x+8})dx = \left[2\cdot\ln(e^x+8) - x\right]_0^{\ln 8} = \left(2\cdot\ln 16 - \ln 8\right) - 2\cdot\ln 9 = \ln\frac{32}{81}$

$A = |\ln\frac{32}{81}| = \ln\frac{81}{32} \approx 0{,}93$

---

2. Für negative k-Werte besitzt jede Scharfunktion eine Definitionslüvke, aber keine Nullstelle.

Begründung:

f_k besitzt für $k<0$ die Fefintionslücke $x = \ln(-k)$

$1 - \frac{2k}{e^x+k} = 0 \quad\Rightarrow\quad e^x = k$ besitzt für $k<0$ keine Lösung.

Grundkursabitur 2010	Infinitesimalrechnung	Aufgabe II

Gegeben ist die Funktion f: $x \to \frac{1-x}{1+x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_f an.

   b) Die Terme der gebrochen-rationalen Funktionen g und h haben den gleichen Zähler wie f(x), aber jeweils einen anderen Nenner.

   Geben Sie je einen möglichen Funktionsterm für g und h an, so dass im jeweils maximalen Definitionsbereich gilt:

   - Der Graph von g hat keine senkrechte Asymptote.

   - Die Funktion h hat an der Stelle $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

---

2. a) Geben Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f an und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von .

   b) Berechnen Sie f(3), $f(-2)$ und $f(-5)$. Zeichnen Sie G_f sowie die Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

---

3. Die Funktion f ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion von f.

   Was lässt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der Symmetrie von folgern?

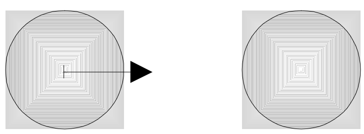
---

4. a) Bestätigen Sie, dass die Funktion F: $x \to -x + 2 \cdot \ln(x+1)$ für $x \in]-1; \infty[$ eine Stammfunktion von f ist.

   b) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f im I. Quadranten den Viertelkreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 in zwei etwa inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Die Ergebnisse der Aufgaben 1 bis 3 können im Folgenden verwendet werden.

5. Eine Kugel A der Masse 1 kg bewegt sich nach rechts und stößt mit der Geschwindigkeit elastisch und zentral auf eine gleich große ruhende Kugel B.



Kugel A Kugel B

Die Maßzahl der Geschwindigkeit der Kugel A in $\frac{m}{s}$ unmittelbar nach dem Zusammenstoß wird durch die Funktion $v\colon m \to \frac{1-m}{1+m}$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ beschrieben, wobei m für die Maßzahl der Masse der Kugel B in kg steht.

Zu einer Bewegung nach rechts gehören positive Geschwindigkeiten, zu einer Bewegung nach links negative Geschwindigkeiten.

a) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß bewegt, wenn die Masse der Kugel B 0,6 kg beträgt.

Geben Sie die Grenzwerte der Funktion v für $m \to 0$ sowie $m \to +\infty$ an und machen Sie für diese beiden Grenzfälle jeweils den Bewegungsablauf der Kugel A im Sachzusammenhang plausibel.

b) Ermitteln Sie, für welche Werte von m sich Kugel A unmittelbar nach dem Stoß nach rechts bewegt.

Berechnen Sie, für welchen Wert von m sich die Kugel A unmittelbar nach dem Stoß mit $\frac{1}{2}\frac{m}{s}$ nach links bewegt.

Lösung

1. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$ da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} \frac{1-x}{1+x} = \infty$ da $\lim\limits_{x \to -1+0} (1+x) = 0+0$ und $\lim\limits_{x \to -1+0} (1-x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} \frac{1-x}{1+x} = -\infty$ da $\lim\limits_{x \to -1+0} (1+x) = 0-0$ und $\lim\limits_{x \to -1+0} (1-x) = 2$

$x = -1$ ist ein pol einfacher Ordnung.

Waagrechte Asymptote: $y = -1$

Senkrechte Asymptote: $x = -1$

b) h mit $g(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$ hat keine Definitionslücke und damit keine senkrechte Asymptote und

h mit $h(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$ hat an der Stelle $x = -1$ einen Pol gerader Ordnung.

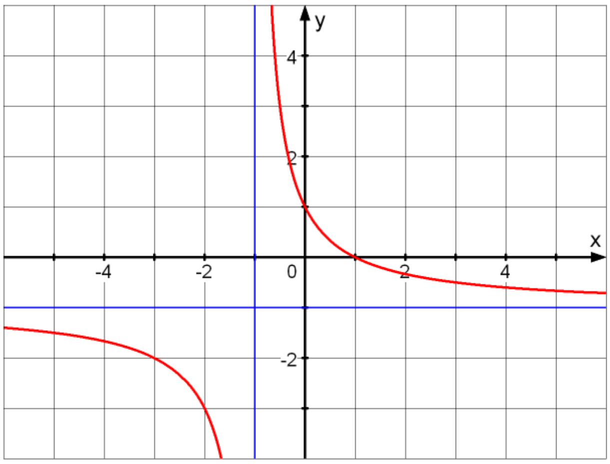
c) $S_x\left(1 \mid 0\right)$ und $S_y\left(0 \mid 1\right)$

$f'(x) = \frac{-1\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$ für $x \in D_f$.

G_f ist für $x \in \,]-\infty; -1[$ und $x \in \,]-1; \infty[$ jeweils streng monoton fallend.

d)

x	-5	-2	5
f(x)	$-1{,}5$	-3	$-2/3$



---

3. Auflösen der Funktionsgleichung nach y:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \;\Rightarrow\; y\cdot(1+x) = 1-x \;\Leftrightarrow\; y + y\cdot x = 1-x \;\Leftrightarrow\; x + x\cdot y = 1-y$$

$$\Leftrightarrow\; x\cdot(1+y) = 1-y \;\Rightarrow\; x = \frac{1-y}{1+y}$$

Also ist f umkehrbar mit der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon x \to \frac{1-x}{1+x} = f(x)$

Die Funktion f ist ihre eigene Umkehrfunktion. Ihr Graph ist also symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

4: a) $F'(x) = -1 + 2\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{-1\cdot(x+1)+2}{x+1} = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$

b) $\int_0^1 f(x) = \Big[-x + 2\cdot\ln(x+1)\Big]_0^1 = -1 + 2\cdot\ln 2$

$$\frac{-1+2\cdot\ln 2}{\frac{1}{4}\pi} = \frac{-4+8\cdot\ln 2}{\pi} \approx 0{,}49$$

---

5. a) $v(0{,}6) = \frac{1-0{,}6}{1+0{,}6} = 0{,}25$

$$\lim_{m\to\infty} v = -1$$

Kein Geschwindigkeitsverlust der Kugel A, da die Kugel B nur infinitesimal kleine Masse hat.

$$\lim_{m \to 0} v = 1$$

Die Kugel A wird an der großen Masse von B reflektiert.

b)

	$0 < m < 1$	$1 < m < \infty$
$m - 1$	$+$	$-$
$m + 1$	$+$	$+$
A bewegt sich nach	rechts	links