

**STAATSINSTITUT  
FÜR SCHULQUALITÄT  
UND BILDUNGSFORSCHUNG  
MÜNCHEN**

**HANDREICHUNG  
FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT  
AM GYMNASIUM**

**DAS ABITUR IM FACH MATHEMATIK  
AM ACHTJÄHRIGEN GYMNASIUM**

**AUGUST 2008**

Erarbeitet im Auftrag des  
BAYERISCHEN STAATSMINISTERIUMS  
FÜR UNTERRICHT UND KULTUS

Herausgeber:  
STAATSIINSTITUT FÜR SCHULQUALITÄT  
UND BILDUNGSFORSCHUNG

Anschrift:  
Staatsinstitut für Schulqualität  
und Bildungsforschung  
Abteilung Gymnasium  
Schellingstraße 155  
80797 München  
Tel.: 089/2170-2138  
Fax: 089/2170-2125  
Internet: [www.isb.bayern.de](http://www.isb.bayern.de)  
E-Mail: [christian.scheungrab@isb.bayern.de](mailto:christian.scheungrab@isb.bayern.de)

Herstellung:  
MDV Maristen Druck & Verlag  
Landshuter Straße 2  
84095 Furth  
Tel.: 08704/ 92862-0

# Vorwort

Der erste Jahrgang des achtjährigen Gymnasiums in Bayern legt 2011 die Abiturprüfung ab. Die Schülerinnen und Schüler bereiten sich darauf vor auf der Grundlage eines neuen Lehrplans und unter Verwendung einer neuen Generation von Schulbüchern. Die Anforderungen im schriftlichen Abitur des Fachs Mathematik werden sich den veränderten Rahmenbedingungen anpassen.

Um den Lehrkräften eine zielgerichtete Arbeit mit ihren Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, entstand die vorliegende Handreichung.

Sie stellt in Kapitel 1 die Rahmenbedingungen für das Mathematikabitur am achtjährigen Gymnasium vor: Die zentralen Vorgaben, die Veränderungen im Lehrplan, die Anforderungen der EPA (Einheitliche Anforderungen in der Abiturprüfung) und der KMK-Bildungsstandards, insbesondere auch im Hinblick auf die seit langem forcierte veränderte Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, und schließlich die Merkhilfe Mathematik als neues Hilfsmittel in Unterricht und Leistungserhebungen.

Kapitel 2 beschreibt die neue Struktur der schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik. Insbesondere wurde ein komplettes Beispielabitur ausgearbeitet und kommentiert.

Kapitel 3 schließlich bringt eine Reihe weiterer Aufgaben als zusätzliches Veranschaulichungsmaterial. Dabei werden zum einen ausgewählte Inhalte angesprochen, bei denen aufgrund von Lehrplanumstellungen im Vergleich zum neunjährigen Gymnasium unklar sein könnte, in welcher Tiefe oder Breite sie zu behandeln sind. Zum anderen werden Aufgaben angeboten, die in den Bereichen Modellieren, Kommunizieren und Argumentieren Arbeitsfelder und Schwerpunkte aufzeigen.

Angesichts der Tatsache, dass in den Aufgabenbeispielen dieser Handreichung naturgemäß verstärkt auf neue Tendenzen eingegangen wird, um die gewünschte Ausrichtung für die Zukunft aufzuzeigen, wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass nicht all diese Tendenzen zugleich in voller Tiefe in der ersten Abiturprüfung des achtjährigen Gymnasiums realisiert werden.

Die Intention einer Handreichung kann es nicht sein, die Schulbücher zu ersetzen. Zu den vielen zentralen Themen des Lehrplans, die in Umfang und Art der Anforderungen gleich geblieben sind und die nach wie vor zentrale Teile der Abiturprüfung darstellen werden, finden sich in der Handreichung oft nur kurze Hinweise, da frühere Abituraufgaben hier ebenso wie die neuen Schulbücher umfangreiches Übungsmaterial bieten. Hervorgehoben werden aber einzelne Aspekte und gelegentlich wirkliche Details, die als neuartig betrachtet wurden, um in diesen Bereichen Unklarheiten zu vermeiden. Selbst bei solchen Aufgaben aber musste exemplarisch gearbeitet werden. Aufschluss über Gewichtung und Intention der Beispielaufgaben geben in vielen Fällen Begleittexte und Kommentare, so dass es nicht als ausreichend zu betrachten wäre, die vorliegende Handreichung als reine Aufgabensammlung zu verwenden, vielmehr ist der Begleittext intensiv mit zu berücksichtigen.

In diesem Sinn hoffen wir, den Kolleginnen und Kollegen eine hilfreiche Grundlage für die Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur am achtjährigen Gymnasium zu geben.

Bemerkung:

- Die Ausführungen der Handreichung, insbesondere die Jahrgangsstufenangaben, erfolgen auf der Grundlage des Lehrplans für das achtjährige Gymnasium (soweit nicht explizit anders angegeben).

Mitglieder des Arbeitskreises waren:

OStR	Stefan Ernst	Johann-Christian-Reinhart-Gymnasium, Hof
StD	Manfred Herbst	Gymnasium Herzogenaurach
StDin	Marion Kelly	ISB, München
StD	Herbert Langer	Gymnasium Grafing
OStR	Christian Scheungrab	ISB, München
StDin	Gabriele Wienholtz	Gymnasium Neubiberg

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>VORWORT</b> .....	<b>3</b>
<b>1 VERÄNDERTE RAHMENBEDINGUNGEN FÜR DAS ABITUR AM ACHTJÄHRIGEN GYMNASIUM</b> .....	<b>7</b>
1.1 ÜBERBLICK ÜBER DIE ZENTRALEN VORGABEN.....	7
1.2 ANMERKUNGEN ZUM LEHRPLAN DER JAHRGANGSSTUFEN 11 UND 12 .....	7
1.3 EINHEITLICHE ANFORDERUNGEN IN DER ABITURPRÜFUNG (EPA) UND KMK-BILDUNGS- STANDARDS .....	17
1.4 VERWENDUNG DER MERKHILFE.....	22
<b>2 DIE STRUKTUR DES MATHEMATIKABITURS AM ACHTJÄHRIGEN GYMNASIUM</b> .....	<b>23</b>
2.1 GRUNDSÄTZLICHES .....	23
2.2 GESTALTUNG DES ANALYSISTEILS.....	23
2.3 BEISPIEL FÜR EIN KOMPLETTES ABITUR .....	24
2.4 BEISPIELABITUR: LÖSUNGEN UND KOMMENTARE.....	41
<b>3 WEITERE AUFGABENBEISPIELE</b> .....	<b>53</b>
3.1 ANMERKUNGEN UND BEISPIELE ZU AUSGEWÄHLTEN LEHRPLANINHALTEN .....	53
3.1.1 Funktionstypen.....	53
3.1.2 Extremwertaufgaben.....	56
3.1.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	58
3.1.4 Änderungsrate .....	60
3.1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	62
3.1.6 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung .....	63
3.1.7 Lineare Abhängigkeit .....	65
3.2 ANMERKUNGEN UND BEISPIELE ZU AUSGEWÄHLTEN KOMPETENZEN.....	66
3.2.1 Modellieren .....	66
3.2.2 Argumentieren und Kommunizieren.....	71
<b>ANHANG</b> .....	<b>74</b>
<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	<b>78</b>



# 1 Veränderte Rahmenbedingungen für das Abitur am achtjährigen Gymnasium

## 1.1 Überblick über die zentralen Vorgaben

Die Situation der Jahrgangsstufen 11 und 12 am achtjährigen Gymnasium unterscheidet sich in grundlegenden Punkten von der der Jahrgangsstufen 12 und 13 am neunjährigen Gymnasium:

1. Die bisherige Aufteilung in Grund- und Leistungskurse entfällt. Alle Schülerinnen und Schüler erhalten in den Jahrgangsstufen 11 und 12 jeweils **vier Wochenstunden** Mathematikunterricht und nehmen verpflichtend an der **schriftlichen Abiturprüfung** im Fach Mathematik teil.
2. Die gegenüber dem dreistündigen Grundkurs gewonnene **Unterrichtszeit** dient der Behandlung von Stoffgebieten aus der früheren Jahrgangsstufe 11 sowie der Vertiefung von Stoffgebieten im Sinn kumulativen Lernens. Zahlreiche typische Leistungskursinhalte wurden gestrichen. Die nachfolgenden Ausführungen zeigen auf, inwiefern sowohl quantitativ durch die Aufnahme einzelner zusätzlicher Inhalte, vor allem aber qualitativ durch eine konsequente Weiterführung einer neuen Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur das **von der KMK für vier- und mehrstündige Kurse geforderte „erhöhte Anforderungsniveau“** erreicht wird.
3. Der Lehrplan für das achtjährige Gymnasium betont in besonderem Maße die Bedeutung eines **langfristigen, kumulativen, auf Verständnis basierenden Lernens** (vgl. 1.2).
4. Von der Stundenverteilung her setzt der Lehrplan der Jahrgangsstufen 11 und 12 einen eindeutigen **Schwerpunkt im Bereich der Analysis**. Dies ist dadurch bedingt, dass eine Reihe von Analysis Themen der früheren Jahrgangsstufe 11 im achtjährigen Gymnasium nicht bereits in 10, sondern weiterhin in 11 behandelt wird (vgl. 1.2).
5. **Stochastik** wird bereits **in der Unter- und Mittelstufe** als eigener Strang angelegt. Die dort erworbenen Kompetenzen werden in der Oberstufe vertieft und sind für das Abitur relevant (vgl. 1.2).
6. Die Veränderungen im Lehrplan sind abgestimmt mit den bundesweiten Vereinbarungen der **EPA** und der **KMK-Bildungsstandards** (vgl. 1.3).
7. Auf die Anwendung von **Computeralgebra- und Computergeometrieprogrammen** kann insbesondere in den Seminaren der Oberstufe in sinnvoller Weise eingegangen werden. Die Möglichkeit eines Einsatzes in der schriftlichen Abiturprüfung wird zu einem späteren Zeitpunkt in Erwägung gezogen. Die Schaffung entsprechender Möglichkeiten zeitgleich mit der Durchführung des ersten Abiturs am achtjährigen Gymnasium wurde als zu belastend betrachtet.

## 1.2 Anmerkungen zum Lehrplan der Jahrgangsstufen 11 und 12

Nachfolgend werden für die drei Themengebiete Analysis, Stochastik und Geometrie die wesentlichen Neuerungen dargestellt, indem der Lehrplan kapitelweise betrachtet wird.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei den folgenden Ausführungen naturgemäß nicht um eine vollständige, abgeschlossene Liste in allen Details handeln kann. Verbindliche Grundlage für Unterricht, Leistungserhebungen und Abitur ist der Lehrplantext.

Zu beachten ist insbesondere, dass die angegebenen Beispielaufgaben unter Umständen auf neue Teilaspekte eines Lehrplanabschnitts vergleichsweise ausführlich eingehen, während zum un-

veränderten Kern eines Abschnitts oft nur eine kurze Bemerkung im Sinne von „Alles wie bisher“ erfolgt. An solchen Stellen ist richtig zu deuten, dass Änderungen in Details, auch wenn sie in der Handreichung ausführlich dargestellt werden, in Abituraufgaben gleichwohl nur die ihnen zustehende Rolle spielen werden.

## Analysis

Stoffgebiete der Unter- und Mittelstufe stellen wie bisher eine unentbehrliche Grundlage für die Abiturprüfung dar, beispielsweise auch der in Jahrgangsstufe 10 behandelte Grenzwert für  $x \rightarrow \pm \infty$ .

In den Jahrgangsstufen 11 und 12 schränkt sich der Lehrplan ausdrücklich auf Funktionen ein, bei denen sich „in der Regel die Frage nach der Stetigkeit nicht stellt“. Formalisierte Stetigkeitsuntersuchungen sind nicht vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen allerdings im Unterricht – durch exemplarische Veranschaulichungen der Problematik, die sich beim Differenzieren bzw. Integrieren unstetiger Funktionen ergibt – ein Bewusstsein dafür entwickeln, dass die Eingrenzung der Schulmathematik auf stetige Funktionen eine Vereinfachung und Beschränkung darstellt.

### M 11.1<sup>1</sup> Änderungsverhalten von Funktionen

#### M 11.1.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

Gebrochen-rationale Funktionen stellten bereits bisher ein wichtiges Thema im Grundkurs dar. Entsprechende Aufgaben wie beispielsweise Gk 2007, II sind weiterhin im Abitur denkbar.

Eine inhaltliche Änderung in diesem Lehrplanabschnitt findet sich bei der Behandlung schräger Asymptoten, die auf Fälle beschränkt wird, bei denen die Gleichung unmittelbar aus dem Funktionsterm ersichtlich ist. Demnach ist eine Aufgabenstellung zu schrägen Asymptoten wie im Gk 2002, I, 1a ( $f : x \mapsto x - 2 + \frac{4}{x-1}$ ) möglich, nicht aber wie im Gk 1999, I, 2a ( $f : x \mapsto \frac{-x^2}{x+1}$ ).

#### M 11.1.2 Lokales Differenzieren

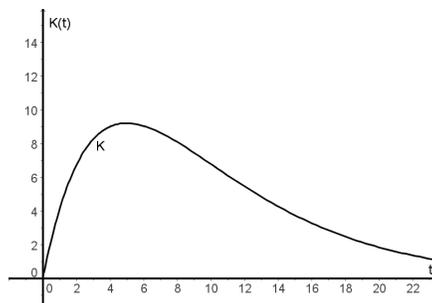
Das Thema wurde am neunjährigen Gymnasium vor der Kursphase behandelt. Durch die Stoffverschiebung wird das Gewicht des Themas im Abitur steigen. Insbesondere die Deutung der Ableitung als Änderungsrate, die neu aufgenommen wurde, ist in Anwendungsaufgaben wie der folgenden von Bedeutung.

#### Aufgabe 11.1.2 A

Die Funktion  $K$  mit  $K(t) = 5t \cdot e^{-0,2t}$  und  $t \geq 0$  beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

Dabei wird  $t$  in Stunden seit der Einnahme und  $K(t)$  in  $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$  gemessen.

Die Abbildung zeigt den Graph von  $K$ .



- Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Konzentration zum Zeitpunkt  $t = 10$ .
- Ermitteln Sie rechnerisch, zu welcher Zeit das Medikament am stärksten abgebaut wird.

<sup>1</sup> Diese und nachfolgende Nummerierungen des Abschnitts entsprechen den Nummerierungen der Lehrplankapitel.

Obige Aufgabe wird im Abschnitt 3.1.4 im Zusammenhang mit weiteren Fragestellungen nochmals aufgegriffen.

In typischen Beispielen werden differenzierbare Funktionen von nicht-differenzierbaren abgegrenzt, ohne dabei einen Schwerpunkt auf formale Verfahren zu legen. Eine mögliche Fragestellung zeigt folgende Aufgabe:

#### Aufgabe 11.1.2 B

Geben Sie eine Funktion an, die an der Stelle  $x = 2$  definiert, aber nicht differenzierbar ist.

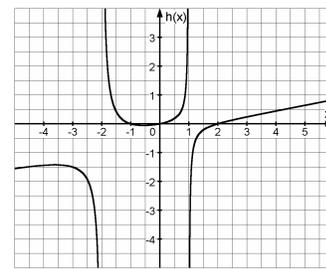
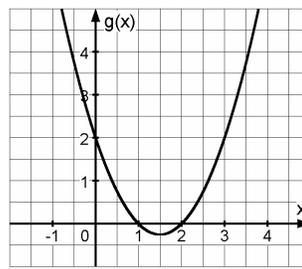
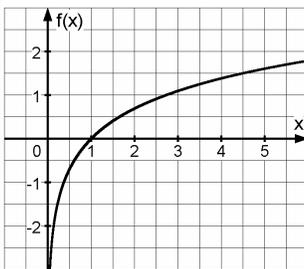
#### M 11.1.3 Globales Differenzieren

Weiterhin ist die Ableitung ganzrationaler und gebrochen-rationaler Funktionen ein wichtiges Thema.

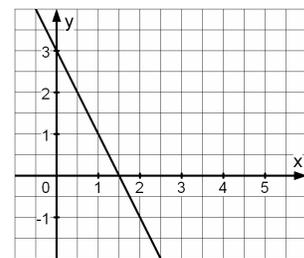
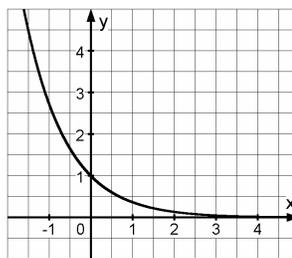
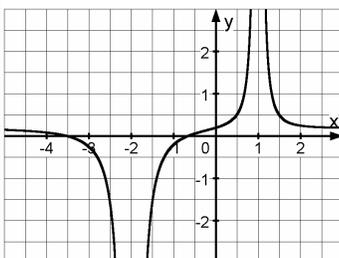
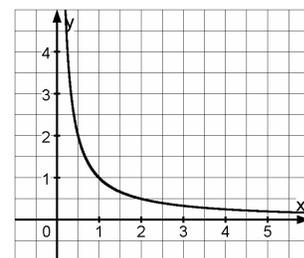
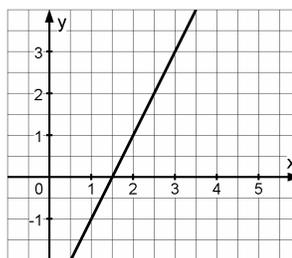
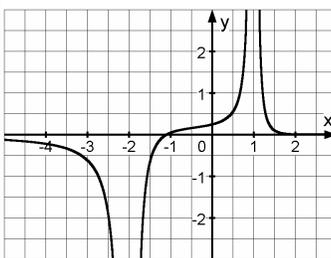
Der Lehrplanabschnitt betont die Arbeit mit Graphen. Aufgaben wie die folgende erhalten demnach im Abitur stärkere Bedeutung:

#### Aufgabe 11.1.3

Gegeben sind die Graphen dreier Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  sowie sechs weitere Graphen, darunter die Graphen der Ableitungsfunktionen dieser drei Funktionen. Ordnen Sie die Funktionen ihren Ableitungsfunktionen zu und begründen Sie Ihre Entscheidungen.



Mögliche Ableitungsfunktionen:



Im Lehrplanabschnitt M 11.1.3 erfolgt zudem die Einführung der Stammfunktion. Auch hier sind Aufgaben einzubeziehen, die die Arbeit mit dem Graphen in den Mittelpunkt stellen, wie beispielsweise Lk 2002, I, 1a.

#### M 11.1.4 Anwendungen der ersten Ableitung

Neu im Lehrplan ist das Newtonverfahren, das in Abstimmung mit der EPA als Beispiel für ein numerisches Verfahren aufgenommen wurde. Die nachfolgende Aufgabe geht über die reine Anwendung des Verfahrens hinaus und prüft Verständnis für das Vorgehen. Ein weiteres Beispiel findet sich in Kapitel 2.3, AII, 5b.

##### Aufgabe 11.1.4

Das Bild zeigt den Graph  $G_f$  der Funktion

$$f : x \mapsto x^2 - 2, D = [0; +\infty[, \text{ mit der Nullstelle } \sqrt{2}.$$

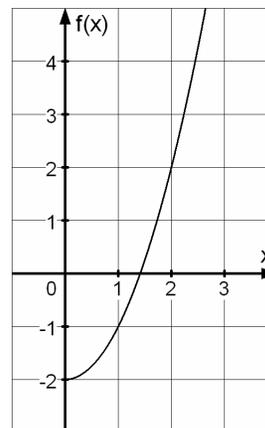
- a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an  $G_f$  an der Stelle  $x_0 = 2$  sowie die Stelle  $x_1$ , an der diese Tangente die  $x$ -Achse schneidet. Zeichnen Sie die Tangente in der Abbildung ein.

- b) Erklären Sie die Grundidee des Newton-Verfahrens. Zeigen Sie, dass die allgemeine Newton-Formel

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

berechnete  $x_1$  liefert.

- c) Führen Sie einen weiteren Schritt des Newton-Verfahrens durch und zeigen Sie, dass die dadurch gewonnene Näherung weniger als 0,2 % von  $\sqrt{2}$  abweicht.



Monotonie und lokale Extrema wurden am neunjährigen Gymnasium vor der Kursphase eingeführt, allerdings im Zusammenhang mit weiteren Funktionstypen in der Kursphase erneut aufgegriffen. Diese Themen waren demnach schon immer wichtiger Bestandteil der Abiturprüfung und werden es weiterhin sein.

Die Behandlung *ganzzahliger* Funktionen war auch bisher ein mögliches Abiturthema (vgl. Gk 2005, II oder Gk 2003, II), erhält aber nun ein neues Selbstverständnis, vgl. 2.3, AI, 6.

#### M 11.3 Weitere Ableitungsregeln

Auch dieser Lehrplanabschnitt wurde am neunjährigen Gymnasium bereits vor der Kursphase behandelt. Vielfältige Beispiele in der vorliegenden Handreichung machen deutlich, dass die Bedeutung von Sinus- und Kosinusfunktionen sowie Wurzelfunktionen (ggf. auch in anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen) im Abitur steigen wird. Dies stellt eine substantielle Veränderung gegenüber dem bisherigen Grundkursabitur dar.

Explizit nicht mehr Stoff ist die formale Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion. Qualitative Überlegungen oder geführte Aufgaben sind aber weiterhin denkbar, was folgendes Aufgabenbeispiel zeigt:

##### Aufgabe 11.3 (Lk 2006, I, 1d, leicht abgeändert)

Begründen Sie, dass  $f : x \mapsto (x - 1) \cdot \ln x$  im Intervall  $]0; 1]$  umkehrbar ist.

Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion  $g$  an. Überlegen Sie anhand einer Skizze, welcher Grenzwert sich für die Ableitung von  $g$  für  $x \rightarrow 0+$  ergibt.

**M 11.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion**

Das Kapitel entspricht im Wesentlichen dem des bisherigen Grundkurses. Beispielsweise wären Abituraufgaben wie Gk 2007, I oder Gk 2006, I weiterhin gut denkbar. Auch Aufgaben zur Ermittlung eines Terms der Umkehrfunktion sind weiterhin zu erwarten.

Vom Lehrplan nicht mehr vorgesehen ist die Behandlung der allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktion.

**M 11.6 Anwendungen der Differentialrechnung**

Teile der Lehrplanabschnitte 11.6 und 12.4 waren bisher primär vor der Kursphase angelegt, gleichwohl waren die angesprochenen Aufgabenfelder (Anwendungen in Sachzusammenhängen, Extremwertaufgaben, Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, ...) auch Bestandteil des bisherigen Unterrichts in der Kursphase und damit in Abituraufgaben (z. B. Gk 2007, I, 2; Gk 2006, I, a; Lk 2003, II, 2). Ähnliche Aufgaben sind weiterhin denkbar, was auch an mehreren Beispielen in dieser Handreichung deutlich wird.

Die Behandlung von Aufgaben mit Parametern erfolgt auf dem aktuellen Grundkursniveau. Aufgaben wie z. B. Gk 2006, II, in denen der Parameter in elementarer Form auftritt und auch substantiell verwendet wird, sind also weiterhin gut denkbar.

Der Lehrplanabschnitt 12.4 bietet Raum für eine weitere Vertiefung in den angesprochenen Themen.

**M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung****M 12.1.1 Flächeninhalt und bestimmtes Integral**

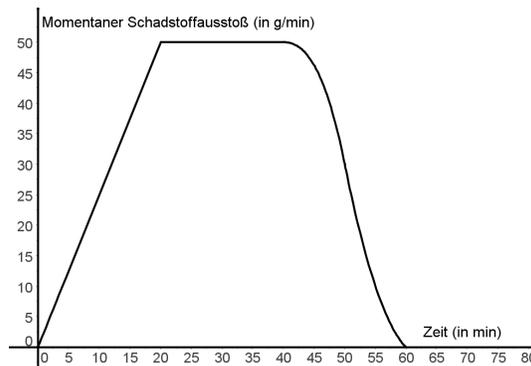
Das Kapitel wurde am neunjährigen Gymnasium größtenteils analog behandelt. Entsprechende Abituraufgaben sind in der Regel alle weiterhin denkbar. Auch an mehreren Stellen der vorliegenden Handreichung finden sich diesbezügliche Aufgabenbeispiele. Besonders hingewiesen werden soll auf Aufgaben, in denen mit Hilfe von Integralen nicht nur Flächeninhalte im klassischen Sinn berechnet werden, sondern Werte bzw. Größen, die durch Flächeninhalte repräsentiert sind, z. B. in der folgenden Aufgabe der Gesamtschadstoffausstoß bei gegebener momentaner Ausstoßrate.

**Aufgabe 12.1.1 A**

Das Diagramm zeigt den momentanen Schadstoffausstoß einer Feuerungsanlage in Abhängigkeit von der Zeit seit Beginn der Feuerung.

Schätzen Sie die Gesamtmasse des ausgetretenen Schadstoffs während der 60-minütigen Betriebszeit ab.

Ihre Überlegungen müssen nachvollziehbar sein.



Nicht behandelt werden die Integrationsregeln zur partiellen Integration und zur Integration durch Substitution aus dem bisherigen Leistungskurs.

Die Merkhilfe führt aber drei elementare Integrationsregeln auf (für  $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$ ,  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  und  $\int f(ax+b) dx$ ), die die Schülerinnen und Schüler anwenden können sollten, wie beispielsweise in folgender Aufgabe. Damit erhalten sie im Vergleich

zum bisherigen Grundkurs zusätzliche Möglichkeiten, selbständig eine Stammfunktion zu finden.

**Aufgabe 12.1.1 B**

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen.

a)  $f : x \mapsto 2xe^{x^2}$

b)  $h : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$

c)  $g : x \mapsto e^{2x+3}$

**M 12.1.2 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen**

Das Krümmungsverhalten wurde auch im neunjährigen Gymnasium während der Kursphase in vielfältiger Weise angesprochen, und war demnach häufig Thema in Abituraufgaben. Entsprechende Aufgaben bisheriger Abiture sind weiterhin vorstellbar.

Der Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion, Ableitung und Integralfunktion wird in diesem Lehrplanabschnitt in besonderer Weise betont, er wurde aber auch bisher schon in Abituraufgaben thematisiert (vgl. Gk 2007, I, 1; Lk 2001, I, 3b).

**M 12.4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung**

Dieses zusammenfassende Kapitel bietet ähnlich wie 11.6 gezielt Gelegenheit, die zuvor gewonnenen Erkenntnisse in größere Zusammenhänge einzubetten. Die Inhalte an sich waren am neunjährigen Gymnasium ebenfalls gegeben, allerdings nicht in dieser expliziten Form der Zusammenschau.

Ein Beispiel für die Untersuchung von Verknüpfungen bekannter Funktionen gibt Aufgabe AI, 7, im Kapitel 2.3, die auch aufzeigt, wie sich die Einbeziehung von Funktionstypen gestalten kann, die im bisherigen Grundkursabitur nicht bzw. kaum eingefordert wurden.

## Stochastik

Stoffgebiete der Unter- und Mittelstufe sind nunmehr auch in der Stochastik als Grundlage zu beachten. Da dies eine Neuerung des achtjährigen Gymnasiums ist, wird nachfolgend nochmals ein Überblick über die entsprechenden Kapitel gegeben:

Jgst 5:	M 5.3.1	Erstes Anwenden des Zählprinzips, Veranschaulichen in Baumdiagrammen
Jgst 6:	M 6.1.3	Relative Häufigkeit; empirisches Gesetz der großen Zahlen; Zufallsexperiment
	M 6.5	Interpretation von Diagrammen, manipulative Darstellung in Diagrammen
Jgst 7:	M 7.4	Auswerten von Daten (auch arithmetisches Mittel)
Jgst 8:	M 8.2	Laplace-Experimente (Grundbegriffe, Zählprinzip)
Jgst 9:	M 9.4	Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente (Pfadregeln)
Jgst 10:	M 10.4	Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente (bedingte Wahrscheinlichkeit)

### M 11.5 Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der in der Mittelstufe intuitiv verwendete Wahrscheinlichkeitsbegriff wird präziser gefasst, die bisherigen Kenntnisse werden vertieft.

Im Unterschied zum bisherigen Grundkurs ist der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit bereits aus Jahrgangsstufe 10 bekannt. Überlegungen zur Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Ereignissen bauen darauf auf. Die folgende Beispielaufgabe illustriert mögliche Fragestellungen, wie sie vom Typ her auch aus bisherigen Leistungskursaufgaben bekannt sind. Grundsätzlich ist nicht an eine explizite Anwendung der Formel von Bayes gedacht. Alle diesbezüglichen Aufgaben können mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel bearbeitet werden. Weitere Beispiele finden sich in den Kapiteln 2.3 und 3 dieser Handreichung.

#### Aufgabe 11.5

Im Jahr 2006 waren in Europa ungefähr 0,1 % der Männer mit HIV infiziert. Mithilfe eines speziellen HIV-Tests soll festgestellt werden, ob eine HIV-Infektion vorliegt.

Wenn ein Test eine Infektion anzeigt, nennt man das Ergebnis „positiv“, unabhängig davon, ob die Infektion wirklich vorhanden ist oder nicht.

Wenn ein Mann mit HIV infiziert ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,9 %, dass dieser spezielle Test positiv ausfällt. Wenn der Mann nicht infiziert ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,8 %, dass der Test bei ihm negativ ausfällt.

- Der HIV-Test kann in zweierlei Hinsicht ein falsches Ergebnis (Fehldiagnose) liefern:
  - Obwohl eine HIV-Infektion vorliegt, erkennt sie der Test nicht.
  - Obwohl keine HIV-Infektion vorliegt, zeigt der Test eine HIV-Infektion an.Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Fehldiagnosen A und B an.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Mann ein positives Testergebnis hat.
- Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann bei Vorliegen eines positiven Testergebnisses tatsächlich mit HIV infiziert ist, beträgt ungefähr 33 %.  
Anm.: Aufgrund dieses niedrigen Werts muss beim Vorliegen eines positiven Testergebnisses zusätzlich ein anderer Test durchgeführt werden, bevor das Ergebnis mitgeteilt wird.

**M 12.2 Binomialverteilung und ihre Anwendungen**

Im Gegensatz zum bisherigen Grundkurs wird der Begriff der Zufallsvariablen (mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung) explizit eingeführt, wobei bei Berechnungen unmittelbar auf Definitionen zurückgegriffen wird. Auf weitergehende Sätze wie den Verschiebungssatz wird verzichtet. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf binomial verteilte Zufallsgrößen gelegt. Neben den folgenden Beispielaufgaben finden sich in den Kapiteln 2.3 und 3 mehrere Aufgaben, die das erwartete Niveau umreißen.

**Aufgabe 12.2 A**

Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen erscheint, jedoch höchstens dreimal. Die Anzahl der Würfe bis zum Spielende sei  $A$ . Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von  $A$ .

**Aufgabe 12.2 B**

Eine Zufallsgröße kann 5 unterschiedliche Werte annehmen. Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung an, so dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert der Zufallsgröße liegt.

Beim Testen von Hypothesen erfolgt eine Einschränkung auf den einseitigen Signifikanztest.

Von den genannten Punkten abgesehen entsprechen die Inhalte denen des bisherigen Grundkurses, wie es zahlreiche klassische Aufgabenstellungen zur Binomialverteilung in 2.3 zeigen.

Die beiden Lehrplanblöcke zur Wahrscheinlichkeit decken demnach unter Einbeziehung der Vorkenntnisse aus der Unter- und Mittelstufe im Wesentlichen den Bereich des bisherigen GK-Lehrplans ab. Mit der bedingten Wahrscheinlichkeit sowie den Kennzahlen für Zufallsvariable werden zwei Themen aus dem bisherigen Leistungskurs in Grundzügen angesprochen; weitere Leistungskursinhalte wie die Normalverteilung oder die Ungleichung von Tschebyschow entfallen.

Die Kombinatorik erscheint nicht mehr als eigenständiges Kapitel, sie wird in den Abituraufgaben ein deutlich geringeres Gewicht als bisher haben (vgl. Kapitel 2.3). Gleichwohl sind kombinatorische Elemente (Ziehen mit und ohne Zurücklegen, Zählprinzip) in Aufgaben zur Stochastik unvermeidlich, was auch in zahlreichen Teilaufgaben dieser Handreichung deutlich wird. Ziel ist aber eine Beschränkung auf grundlegende Aufgabentypen; nicht vorgesehen ist die Behandlung komplexerer Formeln beispielsweise zur Lösung des „Mississippi-Problems“. Zu beachten ist aber, dass derartige Aufgaben in eingeschränkter Komplexität mithilfe elementarer Überlegungen lösbar sind, was im Kommentar zur Ergänzung der beiden folgenden Beispielaufgaben deutlich wird.

**Aufgabe Kombinatorik A**

In einer Urne sind vier Kugeln. Davon ist eine mit dem Buchstaben S, eine mit I, eine mit E und eine mit B beschriftet.

- Man zieht nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dabei das Wort „ISB“ gezogen wird.
- Man zieht drei Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich aus den drei gezogenen Buchstaben das Wort „ISB“ bilden lässt.
- Wie viele unterschiedliche Buchstabenfolgen können gezogen werden, wenn man nacheinander alle Kugeln aus der Urne zieht?

Ergänzung über das zu erwartende Abiturniveau hinaus:

In obige Urne werden zwei weitere Kugeln gelegt, wobei eine den Buchstaben B und die andere den Buchstaben E trägt. Ermitteln Sie, wie viele unterschiedliche Buchstabenfolgen gebildet werden können, wenn nacheinander alle Kugeln gezogen werden.

Kommentar: Zur Lösung dieser Aufgabe kann man nicht mehr unmittelbar auf das Zählprinzip zurückgreifen. Somit sind Fragen dieser Art nicht mehr abiturrelevant. Jedoch könnte auch bei dem neuen Urneninhalt weiterhin mithilfe der Pfadregeln die Frage beantwortet werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Wort „ISB“ gezogen wird, wenn man nacheinander drei Kugeln zieht.

Aufgabe Kombinatorik B

Am Zoll stehen 9 Personen an, 4 davon sind Schmuggler. Ein Zöllner bittet von den 9 Personen 3 zur Kontrolle. Alle 3 werden als Schmuggler entlarvt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein derart gutes Ergebnis, wenn die Personen rein zufällig ausgewählt wurden.

## Geometrie

Die Elementargeometrie der Unter- und Mittelstufe stellt wie bisher eine wichtige Grundlage der Geometrie in der Oberstufe dar; der Lehrplan hebt dies an einzelnen Stellen sogar ausdrücklich hervor.

### **M 11.2 Koordinatengeometrie im Raum**

Im Vergleich zum bisherigen Grundkurs erhalten die Schülerinnen und Schüler mit dem Vektorprodukt ein zusätzliches Instrument, das in verschiedenen Anwendungen, insbesondere bei Flächen- und Volumenberechnungen, aber auch beim Aufstellen des Normalenvektors von Ebenen (12.3), hilfreich ist. Das zusätzliche Hilfsmittel verringert ggf. den Rechenaufwand deutlich, was sich dann auch in der Zahl der Bewertungseinheiten niederschlagen wird.

Zugunsten eines verstärkten Anwendungsbezugs wurden theoretische Betrachtungen (z. B. allgemeiner Vektorbegriff, Vektorraum, Punktraum, Basis und Dimension) zurückgenommen.

Aufgaben wie Lk 2000, V, 1 (Finden einer Orthonormalbasis) sind demnach ausgeschlossen.

### **M 12.3 Geraden und Ebenen im Raum**

Die Behandlung von linearer Abhängigkeit und Unabhängigkeit wurde reduziert auf eine anschauliche Begriffsbildung, soweit diese notwendig ist zum Verständnis der Parameterformen von Geraden und Ebenen sowie zum Erfassen von Lagebeziehungen.

Die notwendige Behandlung linearer Gleichungssysteme knüpft ohne Betonung theoretischer Aspekte an Mittelstufenkenntnisse an. Sie ist als Werkzeug bei der Lösung konkreter Probleme zu betrachten; rein theoretische Aspekte wie die Untersuchung von Lösbarkeit und Lösungsraum werden nicht mehr behandelt. Aufgaben wie Lk 2002, V, 2 (Gleichungssystem mit Parametern) sind demnach im Abitur des achtjährigen Gymnasiums nicht mehr zu erwarten.

Die Hessesche Normalform wird behandelt mit Blick auf typische Abstandsberechnungen; Fragen nach der Lage eines Punkts und des Ursprungs bezüglich einer Ebene sind im Lehrplan nicht mehr vorgesehen.

Neben den oben dargestellten Kürzungen werden weitere Details (z. B. vektorielle Definition des Teilverhältnisses, Achsenabschnittsform einer Ebene, Begriffe „Spurpunkte“ und „Spurgeraden“) vom Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums nicht mehr eingefordert. Die verbliebenen Inhalte der Geometrie entsprechen gleichwohl in weiten Teilen denen des bisherigen Grundkurslehrplans. Die Aufgaben der letzten Jahre wären demnach von den behandelten Inhalten her in der Regel weiterhin so denkbar.

Die Realisierung einer neuen Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur wird auch in der Geometrie konsequent fortgesetzt. Die in 2.3 und 3 vorgestellten Aufgaben zeigen hierzu mögliche Richtungen: Verstärkter Anwendungsbezug, Aufgaben mit einem innermathematischen „Leitthema“ (vgl. GII: Würfelschnitte), Verbalisieren von Lösungsideen, ...

### 1.3 Einheitliche Anforderungen in der Abiturprüfung (EPA) und KMK-Bildungsstandards

Das unbefriedigende Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler in den internationalen Vergleichsuntersuchungen TIMSS und PISA führte zu vielfältigen Maßnahmen im Bereich des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Auch wenn bayerische Schülerinnen und Schüler im innerdeutschen Vergleich sehr erfolgreich abschnitten, ergaben sich aus dem internationalen Vergleich Handlungsansätze für Verbesserungen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, die in den letzten Jahren konsequent verfolgt wurden.

So wurde 2001 eine Handreichung „Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur“ [3] veröffentlicht, die die zentralen didaktischen Forderungen aus der Analyse der TIMSS-Ergebnisse aufbereitete: Sicherung eines flexibel einsetzbaren Grundwissens, Erhöhung der Problemlösefähigkeit, Ausrichtung von Unterricht und Leistungserhebungen auf langfristiges Lernen.

In den Kapiteln 2.3.4 und 2.3.5 der genannten Handreichung wurde aufgezeigt, welche Auswirkungen diese Forderungen auf die Aufgabenstellungen im Abitur haben. Insbesondere wurden die Aspekte „Vernetzung im Anwendungsbezug“, „Innermathematische Vernetzung“, „Begründen – Verbalisieren“, „Einbeziehen von Grundwissen“ und „Erweitern und Variieren von Routineaufgaben“ betrachtet. In den folgenden Jahren wurden diese Elemente in den Abituraufgaben kontinuierlich weiterverfolgt.

Die didaktische Ausrichtung der bayerischen Bestrebungen wurde durch verschiedene bundeslandübergreifende Vereinbarungen bestätigt, die die Zielsetzung der oben genannten Handreichung aufgriffen und bestärkten.

Angesichts dieser Übereinstimmung ist für das Abitur am achtjährigen Gymnasium nicht mit einer didaktischen Neuausrichtung oder einem „Sprung“ in der Art der Aufgaben zu rechnen. Die Tendenzen der letzten Jahre werden sich fortsetzen, gestützt durch die Ausrichtung des Lehrplans und die neuen Schulbücher.

#### EPA

Als zentrale bundeslandübergreifende Vereinbarung für das Abitur ist zunächst die Neuformulierung der EPA zu nennen. Diese wurde im Jahr 2002 veröffentlicht und stellt eine verbindliche Grundlage für jede Abiturprüfung im Bundesgebiet dar.

Die EPA stellt die zu behandelnden Inhalte der drei Themengebiete Analysis, Stochastik und Geometrie dar – geordnet nach den **Leitideen** Funktionaler Zusammenhang, Grenzprozesse/Approximation, Modellieren, Messen, Algorithmus, Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren und Zufall.

Der bayerische Lehrplan stellt grundsätzlich sicher, dass alle in der EPA vorgeschriebenen Inhalte auch in Bayern unterrichtet werden. Beispielsweise wurde aus diesem Grund das Newton-Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen neu in den Lehrplan aufgenommen.

Die EPA geht aufgrund ihres Erscheinungsdatums noch von einer Aufteilung in Grund- und Leistungskurse aus. Allerdings ist beschlossen, die EPA durch neu zu erstellende Bildungsstandards auf Abiturniveau zu ersetzen. Zunächst wird pragmatisch davon ausgegangen, dass bei einer Aufhebung der Grund- und Leistungskursstruktur auf einem „gehobenen Grundkursniveau“ unterrichtet wird.

Des Weiteren beschreibt die EPA drei **Anforderungsbereiche**, ohne allerdings genaue prozentuale Vorgaben für ihre Verteilung zu machen:

Anforderungsbereich I umfasst

- Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II umfasst

- selbständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang,
- selbständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Anforderungsbereich III umfasst

- planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexerer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- bewusstes und selbständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen.

Pauschal wird gefordert, dass ein Schwerpunkt der Aufgaben im Anforderungsbereich II liegen soll, und dass Anforderungsbereich I stärker zu berücksichtigen sei als III. Lehrkräfte, die Abiturvorschläge erstellen und im Ministerium einreichen, brauchen bereits seit einigen Jahren keine Detailaufstellung mit Verteilung von Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche mehr beizulegen. Dies bleibt auch weiterhin so. Gleichwohl ist es zweifelsohne eine Hilfe für den Aufgabenersteller, wenn man für sich selbst eine solche Einteilung vornimmt und prüft, ob die oben genannte Faustregel eingehalten wird.

Die EPA bringt schließlich auch Aufgabenbeispiele sowohl für schriftliche als auch für mündliche Prüfungen, die eine ganze Reihe interessanter Anregungen enthalten.

## KMK-Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss

Ende 2003 wurden die KMK-Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss veröffentlicht. Diese beziehen sich nicht direkt auf das Abitur; die zugrunde liegenden didaktischen Überlegungen sind aber übertragbar. Da die KMK-Bildungsstandards zudem auch vielfältig weiterentwickelt wurden (beispielsweise in Form von bundesweiten Tests und durch unterstützende Materialien wie die KMK-Veröffentlichung „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ [2]), werden sie nachfolgend im Überblick dargestellt:

Die internationale Studie PISA bezog sich in ihrer Rahmenkonzeption zur mathematischen Grundbildung auf „mathematische Kompetenzen“ (z. B. mathematisch modellieren oder mathematisch argumentieren), über die Schülerinnen und Schüler verfügen sollen.

Dieses Konzept wurde in den KMK-Bildungsstandards aufgegriffen. Als **allgemeine Kompetenzen** im Fach Mathematik werden dort genannt:

K1: Mathematisch argumentieren

K2: Probleme mathematisch lösen

K3: Mathematisch modellieren

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

K6: Kommunizieren

Bemerkenswert ist die Betonung des Verbalisierens, das insbesondere in K1 und K6 stark zum Tragen kommt. Die Tendenz, Erklärungen und Begründungen auch in schriftlichen Leistungserhebungen des Fachs Mathematik einzufordern, wird dadurch gestärkt, was sich in konsequenter Fortführung der Aufgabenstellungen der letzten Jahre auch im Abitur des achtjährigen Gymnasiums niederschlagen wird.

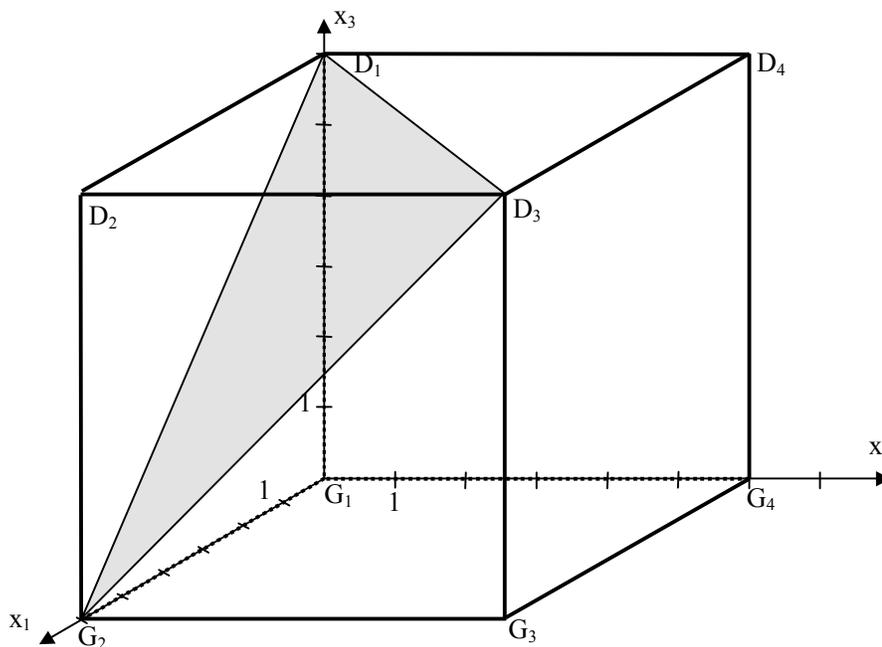
Hilfreiche Ausführungen zu den allgemeinen Kompetenzen finden sich in „Bildungsstandards Mathematik: konkret“ [2], wo insbesondere die einzelnen Kompetenzen beschrieben, gegeneinander abgegrenzt und durch Beispiele erläutert werden.

Gemäß dieser allgemeinen mathematischen Kompetenzen lassen sich mathematische Aufgaben charakterisieren und klassifizieren. Dabei ist zu beachten, dass mathematische Kompetenzen in aller Regel im Verbund erworben und angewendet werden. Die Bearbeitung einer Aufgabe wird demnach meistens mit mehreren Kompetenzen in Zusammenhang stehen.

Als Beispiel kann die folgende Aufgabe dienen, die in 2.3, GII, als Teilaufgabe auftritt:

A 1.3

Die Ebene  $E: x_1 - x_2 + x_3 = 6$  verläuft durch die Punkte  $D_1$ ,  $G_2$  und  $D_3$ .



Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die  $E$  vom Würfel abschneidet.

Offenbar spielt in dieser Aufgabenstellung die Kompetenz K4 „Mathematische Darstellungen verwenden“ eine wichtige Rolle. Zugleich kommen aber noch weitere Kompetenzen zum Tragen, deren Bedeutung wiederum vom gewählten Lösungsweg abhängt: Berechnet man das Volumen rein schematisch mithilfe des Vektorprodukts, liegt ein Schwerpunkt auf der Kompetenz

K5 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“. Erkennt man aber, dass man eine Pyramide vor sich hat, die eine halbe Würfelseite als Grundfläche und die Würfelseite als Höhe hat, so kommt man nahezu ohne Rechenaufwand ans Ziel, dafür liegt nun ein Schwerpunkt der Arbeit in der Kompetenz K2 „Probleme mathematisch lösen“.

Die Zuordnung einer Kompetenz zu einer Aufgabe hängt häufig auch davon ab, welche Vorkenntnisse die Schülerinnen und Schüler haben, in welchem Zusammenhang die Aufgabe bearbeitet wird usw.

Zudem ist zu beachten, dass in zahlreichen Aufgaben Kompetenzen eine (Neben-)Rolle spielen, die in dieser speziellen Aufgabe gar nicht im Zentrum des Interesses des Aufgabenerstellers standen. Beispielsweise wird in nahezu jeder Aufgabe eine Form des Kommunizierens (K6) vorliegen: Der Aufgabentext muss verstanden werden, die eigene Lösung verständlich wiedergegeben werden. Ähnliches gilt für die Kompetenz K5 „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“, die in vielen Aufgaben involviert ist, auch wenn ihr von der Aufgabenintention her keine bestimmende Rolle zukommt. In solchen Fällen kann ein Scheitern in einer Aufgabe durchaus auch auf Defizite in einer Kompetenz zurückzuführen sein, die in einer Klassifizierung nicht explizit genannt wird.

Trotz dieser scheinbaren Unverbindlichkeiten stellt die Zuordnung von Kompetenzen zu Aufgaben für die Lehrkraft ein interessantes Instrument dar: als Diskussionsbasis und Formulierungsgrundlage. Sie ermöglicht zum einen, eine Aufgabensammlung, einen Schulbuchabschnitt oder eine Leistungserhebung auf Ausgewogenheit hin zu diskutieren: Prüft eine Schulaufgabe beispielsweise fast ausschließlich den Umgang mit formalen und technischen Elementen der Mathematik? Ist in einer Schulaufgabe ein überraschend hoher Anteil an „Problemlösung“ zu beobachten? Oder entsteht dieser Eindruck vielleicht nur aufgrund einer Unkenntnis des zugrunde liegenden Unterrichts?

Zum anderen ist die Zuordnung von Kompetenzen hilfreich bei der Analyse von Schülerfehlern und damit bei der Beratung von Jugendlichen und Eltern. Dabei ist zu beachten, dass die Lehrkraft in diesen Fällen die konkrete Schülerbearbeitung vor Augen hat, so dass eine Zuordnung von Defiziten zu einzelnen Kompetenzen gut möglich ist.

Im Anhang wird für das Beispielabitur aus Kapitel 2.3 eine Klassifizierung nach den allgemeinen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards vorgenommen. Wie oben ausgeführt, stellt sie keine verbindliche Einordnung dar, sondern nur EINE von mehreren Möglichkeiten, die sich im konkreten Fall einer Schülerbearbeitung an einzelnen Stellen als unzutreffend erweisen kann. Sie ist als Orientierungshilfe zu verstehen.

In diesem Sinn erscheint es empfehlenswert, auch bei der Erstellung eigener Leistungserhebungen bzw. bei der Auswahl von Aufgaben für den Unterricht eine solche Klassifizierung im Blick zu haben. Keinesfalls kann dies aber zu einer starren Regelung führen: Es ist nicht sinnvoll, zu versuchen, in einer Schulaufgabe stets die sechs Kompetenzen in gleichem Umfang einzubeziehen. Auch die in 2.3 vorgestellten Abituraufgaben zielen keinesfalls auf eine Gleichverteilung der Bewertungseinheiten auf die sechs Kompetenzen ab, wie die Tabellen im Anhang bestätigen. Je nach Aufgabenstellung und Thema sind hier größere Schwankungen in der Verteilung selbstverständlich. Es ist aber zu vermeiden, eine oder mehrere Kompetenzen in seiner Aufgabenauswahl (sei es im Unterricht oder in Leistungserhebungen) dauerhaft zu vernachlässigen.

Wie die EPA machen auch die KMK-Bildungsstandards Vorgaben hinsichtlich der zu behandelnden mathematischen Inhalte. Auch hier erfolgt eine Gliederung nach **Leitideen**, die allerdings angesichts der Ausrichtung auf die Mittelstufe anders benannt wurden:

L1: Zahl

L2: Messen

L3: Raum und Form

L4: funktionaler Zusammenhang

L5: Daten und Zufall

Die bayerischen Lehrpläne erfüllen die KMK-Vorgaben bezüglich der zu behandelnden Inhalte.

Neben den allgemeinen Kompetenzen und den Leitideen beschreiben die KMK-Bildungsstandards als dritte Dimension einer möglichen Klassifizierung von Aufgaben die drei **Anforderungsbereiche** I: Reproduzieren, II: Zusammenhänge herstellen und III: Verallgemeinern und Reflektieren. Bezüglich weitergehender Informationen hierzu wird auf [2] und [4] verwiesen.

## 1.4 Verwendung der Merkhilfe

### Die Merkhilfe als neues Hilfsmittel in Unterricht, Leistungserhebungen und Abitur

Die bisher im Abitur verwendete Formelsammlung [1] ist für das Abitur am achtjährigen Gymnasium kein zugelassenes Hilfsmittel mehr. An ihre Stelle tritt eine Merkhilfe, die am ISB verfasst und im Internet auf den Seiten des Referats (→ Materialien, „Merkhilfe Mathematik“) zur Verfügung gestellt wird.

Die Merkhilfe enthält die für Leistungserhebungen und Abitur wesentlichen Formeln, allerdings in knapperer Formulierung als die bisherige Formelsammlung. Bei entsprechender Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf die Verwendung der Merkhilfe ergeben sich keine erhöhten Anforderungen an die Jugendlichen – im Gegenteil: Das neue Konzept ist geprägt vom Bestreben nach Übersichtlichkeit und leichter Handhabung.

Zu beachten ist der Bezug der Merkhilfe zum Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums: Themengebiete wie Integration durch Substitution, partielle Integration oder Normalverteilung werden von der Merkhilfe nicht angesprochen, da sie nicht mehr im Lehrplan enthalten sind.

### Arbeit mit der Merkhilfe

Die Merkhilfe kann ab Jahrgangsstufe 10 in Leistungserhebungen eingesetzt werden. Wie beim Einsatz des Taschenrechners steht es der Lehrkraft in Jahrgangsstufe 10 frei, die Verwendung des Hilfsmittels in einzelnen Leistungserhebungen zu untersagen.

Die Verwendung der Merkhilfe muss im Unterricht in geeigneter Weise vorbereitet werden. Im Regelfall wird es sich als sinnvoll erweisen, die einzelnen Passagen bei der Behandlung der entsprechenden Inhalte (bzw. für Inhalte der Mittelstufe im Rückblick) im Unterricht zu besprechen. Die Jugendlichen müssen mit Bezeichnungen und Begriffen, die in der Merkhilfe verwendet, aber nicht erklärt werden, vertraut sein, ebenso mit darin nicht genannten Voraussetzungen und Einschränkungen. Beispielsweise muss die Bedeutung der Variablen in den Formeln zu Flächen- und Rauminhalten ebenso bekannt sein wie die Einschränkung des Definitionsbereichs für die Variablen bei den Potenzgesetzen. Einzelne aus der bisherigen Formelsammlung gewohnte Formeln wurden in die Merkhilfe nicht aufgenommen, zum Teil, weil sie zum elementaren Grundwissen gehören, (z. B. Flächeninhalt des Rechtecks), zum Teil, weil die betreffende Formel eigenständig hergeleitet werden kann (z. B. Diagonalenlänge im Quadrat oder Höhe im gleichseitigen Dreieck).

### Zusätzliche Verwendung eines Kompendiums

Unabhängig von der Verwendung der Merkhilfe wird den Fachschaften empfohlen, über die Verwendung kommerzieller Formelsammlungen/Kompendien im Unterricht und in der häuslichen Arbeit zu beraten. Solche Kompendien sind nicht lehrmittelfrei; sie müssten ggf. von den Schülerinnen und Schülern selbst nach Fachschaftsbeschluss erworben werden. Es gibt mittlerweile verschiedene Werke, die u. U. auch Aufgabenbeispiele enthalten. Sie können den Schülerinnen und Schülern von der Mittelstufe an eine wertvolle Hilfe bei der Sicherung von Grundwissen sein. Dabei üben sich die Jugendlichen im Umgang mit derartigen Hilfsmitteln, was schließlich in den Seminaren der Oberstufe als Teil eines wissenschaftspropädeutischen Arbeitens weiter aufgegriffen werden kann.

## 2 Die Struktur des Mathematikabiturs am achtjährigen Gymnasium

### 2.1 Grundsätzliches

Am achtjährigen Gymnasium nehmen alle Schülerinnen und Schüler verpflichtend an einer schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik teil. Deren grundlegende Konzeption wird nachfolgend vorgestellt.

Wie bisher werden die drei Bereiche Analysis, Stochastik und Geometrie in getrennten Aufgabengruppen geprüft. Für jeden der drei Bereiche werden, ebenfalls wie bisher, je zwei Aufgabengruppen zur Auswahl gestellt, aus denen die Lehrkraft für seine Schülerinnen und Schüler je eine auswählt.

Die Arbeitszeit beträgt 240 Minuten, also 60 Minuten mehr als bisher im Grundkurs.

Wie im Kapitel 1.1 dargestellt, unterscheidet sich die Situation der Jahrgangsstufen 11 und 12 am achtjährigen Gymnasium in grundlegenden Punkten von der der Jahrgangsstufen 12 und 13 am neunjährigen Gymnasium, u. a. in einem deutlich höheren Anteil der Analysis an der Unterrichtszeit. Dies schlägt sich nieder in einer veränderten Verteilung der Bewertungseinheiten:

Analysis:	60 Bewertungseinheiten
Stochastik:	30 Bewertungseinheiten
Geometrie:	30 Bewertungseinheiten

Wie bereits in den Abituraufgaben der letzten Jahre zu beobachten war, wird ein Themenbereich nicht unbedingt durch eine zusammenhängende Aufgabe abgedeckt sein. Dies gilt insbesondere für die Analysis. Hier werden die 60 BE grundsätzlich nicht auf eine zusammenhängende Aufgabe vergeben. Etwa 20 BE entfallen auf einen Teil 1 mit vermischten Aufgaben, der in dieser Form neuartig ist und daher nachfolgend in 2.2 näher charakterisiert wird. Die restlichen etwa 40 BE im Teil 2 werden wie bisher durch umfangreichere, zusammenhängende Aufgaben abgedeckt.

In 2.3 wird ein Beispiel für ein komplettes Abitur vorgestellt, um die Struktur genauer zu veranschaulichen.

Die Lehrkräfte stehen bei der Vorbereitung ihrer Schülerinnen und Schüler auf das erste Abitur am achtjährigen Gymnasium grundsätzlich vor der Frage nach ausreichendem Übungsmaterial. Dazu ist anzumerken, dass die Grundkursaufgaben der letzten Jahre als Übungsaufgaben in weiten Teilen gut geeignet sind. Diese Handreichung erläutert, dass die bisherigen Anforderungen an einzelnen Stellen aufgrund neuer Inhalte oder neuer Schwerpunktsetzungen modifiziert werden und bietet exemplarisch Aufgabenmaterial an. Die neuen Schulbücher werden hierzu weiteres Übungsmaterial bringen.

### 2.2 Gestaltung des Analysisteils

Einen Analysisteil mit 60 BE als eine zusammenhängende Aufgabe zu gestalten, erschien aus grundsätzlichen Erwägungen heraus nicht wünschenswert, insbesondere auch nicht im Sinn der

Schülerinnen und Schüler. So entschied man sich für eine kombinierte Lösung, um den verschiedenen Anforderungen gerecht zu werden:

Selbstverständlich muss es weiterhin große, zusammenhängende Aufgabenteile geben, um die für ein Abitur notwendige Bearbeitungstiefe zu erreichen. Etwa 40 BE im Teil 2 werden also in einer Form wie bisher vergeben.

Etwa 20 BE im Teil 1 entfallen auf vermischte Aufgaben, deren Ausrichtung nachfolgend näher charakterisiert werden soll:

- Teil 1 wird aus mehreren einzelnen, kürzeren, unabhängigen Aufgaben bestehen.
- Inhaltlich ergänzt Teil 1 die Aufgaben des Teils 2. Teil 1 und Teil 2 sind also im Zusammenhang zu betrachten. Dominiert beispielsweise im Teil 2 ein bestimmter Funktionstyp, so wird er durch Aufgaben zu anderen Funktionstypen im Teil 1 abgerundet. Sollte im Teil 2 beispielsweise das Thema Integration nicht behandelt werden, wird Teil 1 hier möglicherweise einen Schwerpunkt setzen.  
Es ist auch denkbar, dass eine der kurzen Aufgaben im Teil 1 eine der längeren Aufgaben im Teil 2 vorbereitet oder ergänzt.
- Zum Schwierigkeitsgrad von Teil 1 können keine allgemeingültigen Aussagen getroffen werden. Es handelt sich um kürzere, und daher den Schülerinnen und Schülern gerade zum Auftakt der Abiturprüfung vermutlich entgegenkommende Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads: Sehr elementare, oft geübte Aufgabenstellungen, die auf reine Rechenfertigkeiten abzielen, werden sich hier genauso finden wie Aufgaben, die ein selbständiges Argumentieren oder Problemlösen in unvorbereiteten Kontexten erfordern. Auch bezüglich des Schwierigkeitsgrads gilt: Teil 1 ergänzt Teil 2. Sollten sich dort Schwierigkeiten etwas häufen, wird man im Bereich der kurzen Aufgaben eher elementar bleiben, finden sich im Teil 2 bereits verstärkt elementare Anforderungen, können die kurzen Aufgaben gezielt in einen höheren Anforderungsbereich vorstoßen.
- Teil 1 ergänzt Teil 2 auch hinsichtlich der im Kapitel 1.3 angesprochenen Zielsetzungen. Er sichert, dass sowohl hinsichtlich einer neuen Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur als auch hinsichtlich der Kompetenzverteilung gemäß der KMK-Bildungsstandards eine gewisse Breite erreicht werden kann, ohne dabei durch die Randbedingungen einer umfangreichen zusammenhängenden Aufgabe zu stark eingeschränkt zu werden.

### 2.3 Beispiel für ein komplettes Abitur

Um die bisherigen Ausführungen konkret zu veranschaulichen, folgt ein Beispiel für ein komplettes Abitur. Eine Beurteilung der Anforderungen muss dabei vor dem Hintergrund des Lehrplans des achtjährigen Gymnasiums und der neuen Schulbücher erfolgen. Ziel ist es, eine Vorstellung davon zu geben, welcher Art die Anforderungen im Abitur sein werden, auch wenn selbstverständlich eine inhaltliche Ähnlichkeit zwischen den hier vorgestellten Aufgaben und dem Abitur im Jahr 2011 nicht zu erwarten ist.

Die Lehrkraft wählt im folgenden Beispiel – wie bisher – drei Aufgabengruppen zur Bearbeitung für die Schülerinnen und Schüler aus, und zwar eine der beiden Analysis-Aufgabengruppen AI und AII, eine der beiden Stochastik-Aufgabengruppen SI und SII und eine der beiden Geometrie-Aufgabengruppen GI und GII.

Im Kapitel 2.4 finden sich die Lösungen zu den Aufgaben sowie verschiedene Anmerkungen, die wichtig erscheinen.

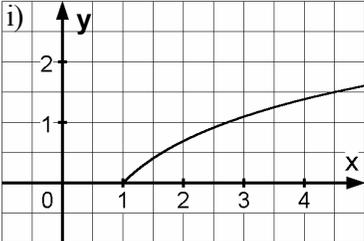
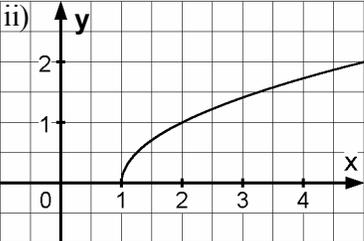
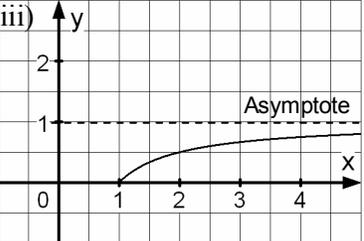
# **Beispielabitur**

## **MATHEMATIK**

**Arbeitszeit: 240 Minuten**

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten  
M1, M2 und M3 zur Bearbeitung aus.

**M1. ANALYSIS**

BE	AI – Teil 1
3	1. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2) \cdot (x^3 - 2x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ .
6	2. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x - 2}$ mit maximalem Definitionsbereich $D_f$ . Geben Sie $D_f$ an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $x = 1$ .
3	3. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion $f$ an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Der Graph von <math>f</math> berührt an der Stelle <math>x = 1</math> die <math>x</math>-Achse.</li> <li>• <math>f</math> hat <math>x = 3</math> als Polstelle.</li> </ul>
3	4. Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion der Funktion $f : x \mapsto \ln(2x)$ , $D_f = \mathbb{R}^+$ .
5	5. Für $x \geq 1$ sind die Funktionen mit den folgenden Termen gegeben: $f(x) = \sqrt{x - a}$ , $g(x) = \ln x$ , $h(x) = -\frac{1}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ . Ordnen Sie die Funktionen den nachfolgenden Graphen zu und bestimmen Sie die Parameter $a$ und $b$ . Erklären Sie Ihr Vorgehen.
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>i)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>ii)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>iii)</p>  </div> </div>

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

**AI – Teil 2**

6. Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .

2

a) Zeichnen Sie den Graphen  $G_f$  in ein Koordinatensystem.

6

b) Dem Flächenstück, das  $G_f$  mit der  $x$ -Achse einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der  $x$ -Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt  $A$  eines solchen Rechtecks.

[Ergebnis:  $A = \frac{16}{9}\sqrt{3}$  ]

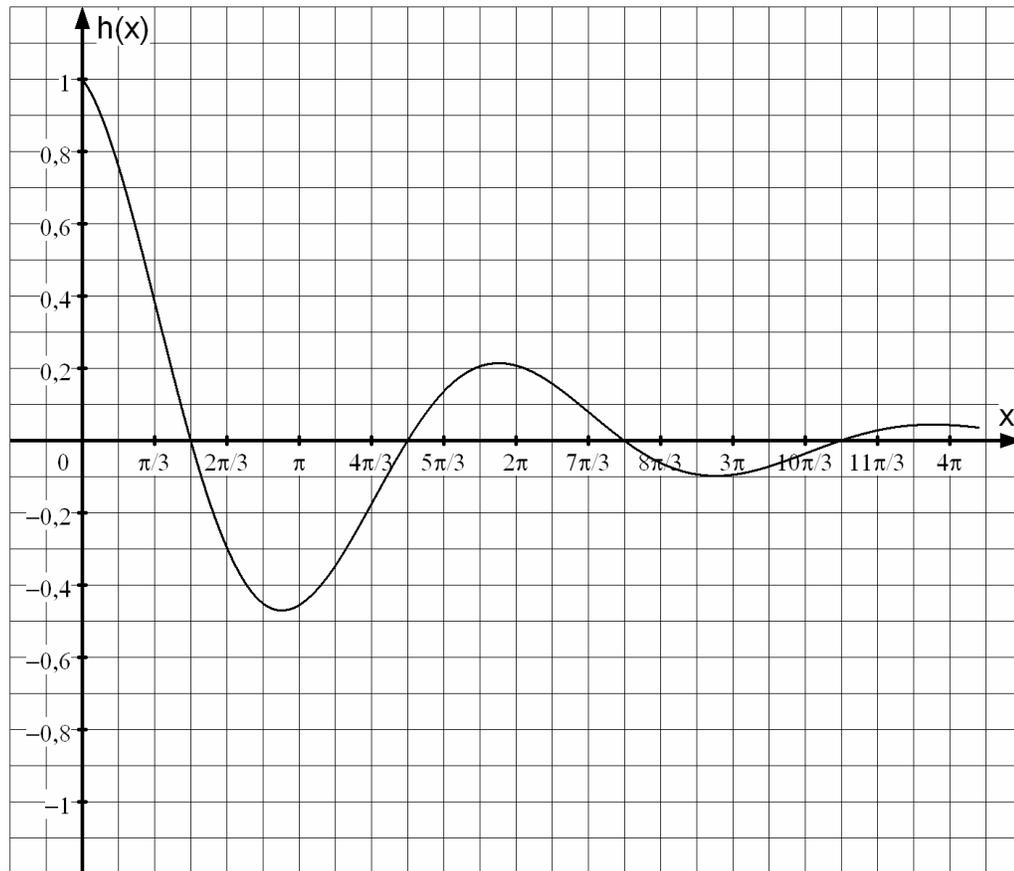
5

c) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks, das  $G_f$  mit der  $x$ -Achse einschließt, vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe 6b bedeckt werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

7. Gegeben sind die Funktionen  $g: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ , und  $h: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$ ,  $D_h = \mathbb{R}$ . Der Graph von  $h$  ist für  $x \geq 0$  im nachfolgenden Diagramm dargestellt.



- 8 a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von  $g$  und geben Sie das Verhalten von  $g$  für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  an. Berechnen Sie die Funktionswerte  $g(0)$ ,  $g(\pi)$ ,  $g(2\pi)$ ,  $g(3\pi)$  und  $g(4\pi)$  und zeichnen Sie damit die Graphen von  $g$  und von  $-g$  in obiges Koordinatensystem ein.
- 3 b) Die Funktion  $h$  entsteht aus der Kosinusfunktion  $x \mapsto \cos x$ ,  $D = \mathbb{R}$ , durch Multiplikation mit der Funktion  $g$ . Beschreiben Sie, inwiefern sich der Graph von  $h$  aufgrund dieser Multiplikation vom Graph der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von  $h$  und die Funktionswerte  $h(n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	c) Berechnen Sie den Term $h'(x)$ der ersten Ableitung von $h$ und weisen Sie nach, dass für Extremstellen von $h$ gilt: $\tan x = -0,25$ . Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von $h$ gegenüber den Extremstellen der Kosinusfunktion verschoben sind.
4	d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel: I. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ II. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
3	e) Die Funktion $H: x \mapsto \frac{16}{17} e^{-\frac{1}{4}x} (\sin x - \frac{1}{4} \cos x)$ , $D_H = \mathbb{R}$ , ist Stammfunktion von $h$ . Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\int_0^{2\pi} h(x) dx$ positiv ist, und deuten Sie diesen Zusammenhang am Graph von $h$ .
3	f) Es gibt Werte $a > 0$ , für die $\int_0^a h(x) dx$ negativ ist. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.
60	

BE	<b>AII – Teil 1</b>
5	<p>1. Geben Sie für die Funktionen mit den folgenden Termen jeweils die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen.</p> $f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f_2(x) = \sqrt{x-1}, \quad f_3(x) = \ln(x-1)$
5	<p>2. Es gibt genau eine Tangente an den Graphen der Funktion <math>f : x \mapsto x^2</math>, <math>D_f = \mathbb{R}</math>, deren Neigungswinkel gegen die x-Achse <math>135^\circ</math> beträgt. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente.</p>
3	<p>3. Der Graph einer auf <math>\mathbb{R}</math> definierten, integrierbaren Funktion <math>f</math> sei punktsymmetrisch zum Ursprung.</p> <p>a) Begründen Sie allgemein, dass dann für alle <math>a &gt; 0</math> gilt: <math>\int_{-a}^a f(x) dx = 0</math>.</p>
4	<p>b) Wählen Sie selbst eine Funktion <math>f</math>, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und bestätigen Sie für dieses <math>f</math> die Aussage aus Teilaufgabe 3a, indem Sie das Integral für die gewählte Funktion <math>f</math> mithilfe einer Stammfunktion berechnen.</p>
3	<p>4. Welcher der angegebenen Terme nähert die Funktion <math>f : x \mapsto \frac{1}{x} + x + 1</math> für große Werte von <math>x</math> am besten? Machen Sie Ihre Antwort plausibel.</p> <p>(i) <math>\frac{1}{x}</math>      (ii) <math>x</math>      (iii) <math>x + 1</math>      (iv) <math>\frac{1}{x} + 1</math>      (v) <math>\frac{1}{x} + x</math></p>

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

## AII – Teil 2

5. Die Funktion  $f : t \mapsto 3(1 - e^{-t}) - t$  wird im Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}_0^+$  betrachtet. Der Graph von  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.

10

- a) Bestimmen Sie das Verhalten von  $f$  an den Grenzen von  $D_f$ .  
Zeigen Sie, dass  $G_f$  genau einen Hochpunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten.  
Berechnen Sie  $f(3)$  und skizzieren Sie  $G_f$  mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse.

[Zur Kontrolle: Hochpunkt an der Stelle  $t = \ln 3$ ]

3

- b) Im Intervall  $[2; 3]$  besitzt  $f$  genau eine Nullstelle  $a$ . Führen Sie mit dem Startwert 3 den ersten Schritt des Newton-Verfahrens zur näherungsweise Berechnung von  $a$  durch.  
Man erhält dadurch  $a$  auf zwei Dezimalen genau.

[Ergebnis:  $a \approx 2,82$ ]

5

- c) Berechnen Sie mithilfe des Näherungswerts aus Teilaufgabe 5b den Inhalt des Flächenstücks, das  $G_f$  im I. Quadranten mit der  $t$ -Achse einschließt.

5

- d) Betrachtet wird die Funktion  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ ,  $D_F = D_f$ .

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von  $F$  in der Nähe des Punktes  $N(a | F(a))$ . Begründen Sie Ihre Ausführungen.

Welche Bedeutung hat das Ergebnis der Teilaufgabe 5c für die Funktion  $F$ ?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

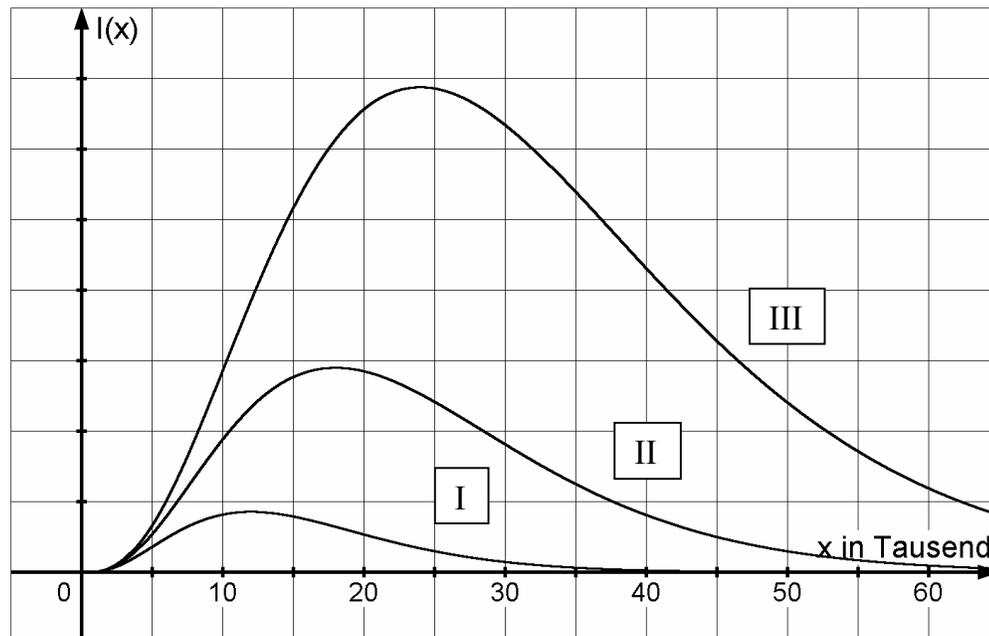
6. Jeder Körper sendet elektromagnetische Strahlung unterschiedlicher Frequenzen aus. Die Intensität der Strahlung hängt von der Frequenz der Strahlung ab. Im Idealfall gilt nach Max Planck für diese Intensität bei einem Körper der Temperatur  $T$ :

$$I_T(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{x}{T}} - 1}, \quad D_{I_T} = \mathbb{R}^+.$$

Dabei entspricht  $x$  bis auf eine Konstante der Frequenz der Strahlung und der Parameter  $T$  (Temperatur in Kelvin) ist positiv.

Die Graphik zeigt die zu drei Werten des Parameters  $T$  gehörenden Graphen von  $I_T$ .

Jede Scharfunktion  $I_T$  hat genau eine Maximalstelle  $x_{\max}$ .



In den folgenden Teilaufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

3

- a) Weisen Sie am Funktionsterm nach, dass  $I_T(x)$  stets positiv ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6

b) Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung der Funktion  $I_T$  gilt:

$$I'_T(x) = \frac{x^2 e^{\frac{x}{T}} \left[ 3 \left( 1 - e^{-\frac{x}{T}} \right) - \frac{x}{T} \right]}{\left( e^{\frac{x}{T}} - 1 \right)^2}.$$

Vergleichen Sie diesen Term mit dem der Funktion  $f$  aus Aufgabe 5 und zeigen Sie, dass für die Maximalstelle  $x_{\max}$  von  $I_T$  gilt:  $\frac{x_{\max}}{T} = a$ , wobei  $a$  die positive Nullstelle von  $f$  ist.

5

c) Unsere Sonne liefert maximale Intensität für  $x_{\max} = 17 \cdot 10^3$  (gelbgrüner Farbbereich). Welche Oberflächentemperatur ergibt sich hieraus für die Sonne?

Ordnen Sie die gezeichneten Graphen der Funktionsschar  $I_T$  den Temperaturen  $T_1 = 4000$  Kelvin,  $T_2 = 6000$  Kelvin und  $T_3 = 8000$  Kelvin zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

3

d) Ein Körper der Temperatur  $T$  liefert für  $x_{\max}$  die Intensität  $I_T(x_{\max})$ . Begründen Sie, dass sich  $I_T(x_{\max})$  verachtfacht, wenn ein Körper mit doppelt so hoher Temperatur betrachtet wird.

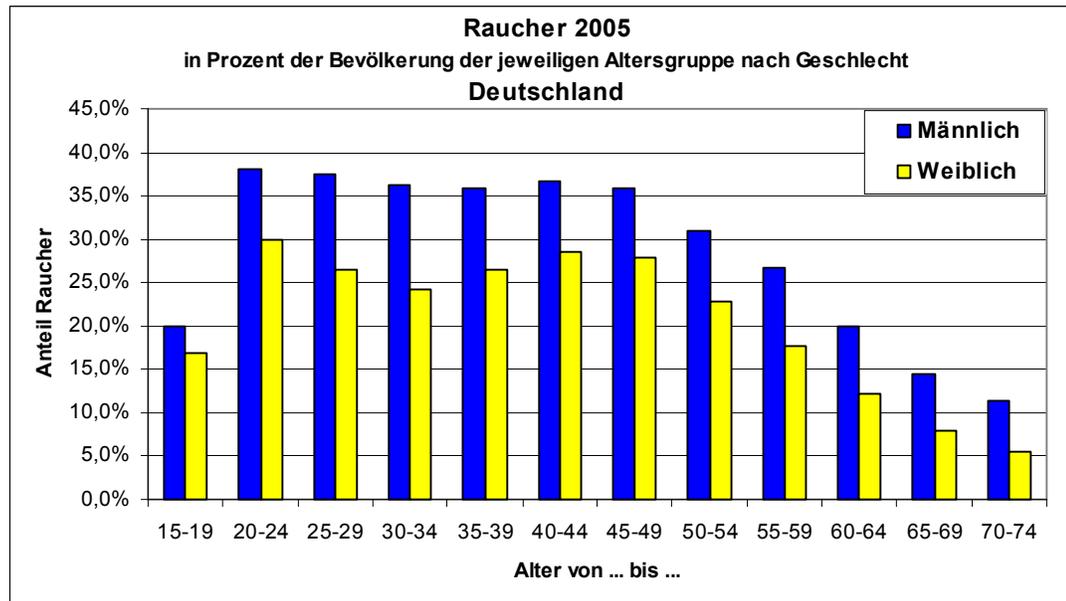
60

## M2. STOCHASTIK

### SI.

BE

Folgendes Diagramm zeigt Daten zum Rauchverhalten in bestimmten Altersgruppen, die das Statistische Bundesamt im Rahmen einer repräsentativen statistischen Erhebung, dem Mikrozensus 2005, veröffentlicht hat.



Dem Diagramm kann man beispielsweise entnehmen, dass 36 % der 35-39-jährigen Männer rauchen. Somit kann im Folgenden davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann aus dieser Altersgruppe raucht, 36 % beträgt.

- 2 1. a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter 20-24-jähriger Mann Nichtraucher?
- 2 b) Wie viel Prozent der Bevölkerung in der Altersgruppe der 20-24-Jährigen rauchen, wenn man davon ausgeht, dass in dieser Altersgruppe gleich viele Frauen und Männer sind?
- 3 c) In einem Zeitungsartikel steht, dass 2005 die Anzahl rauchender Männer im Alter von 40 bis 44 Jahren mit 1,3 Millionen größer war als die entsprechende Anzahl bei den 20-24-Jährigen mit 0,9 Millionen. Erläutern Sie, inwiefern die Zeitungsmeldung mit dem obigen Diagramm in Einklang stehen kann.
- 4 2. Vier Frauen wurden zufällig ausgewählt. Zwei gehören zur Altersgruppe der 20-24-Jährigen und je eine zur Gruppe der 15-19-Jährigen bzw. 60-64-Jährigen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter ihnen mindestens eine Raucherin ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	3. Zehn 20-24-jährige Frauen wurden zufällig ausgewählt.
5	a) Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A: „Unter ihnen sind genau drei Raucherinnen“ und B: „Unter ihnen sind höchstens vier Raucherinnen“.
2	b) Ein Skeptiker meint, dass die Raucherrate unter den 20-24-jährigen Frauen höher als 0,3 ist. Er testet die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,3$ , wobei $p$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine 20-24-jährige Frau raucht. Er stellt jeder der 10 ausgewählten Frauen die Frage „Sind Sie Raucherin?“ und erhält folgendes Antwortprotokoll: „ja – nein – ja – nein – ja – ja – nein – nein – nein – ja“. Untersuchen Sie, ob das Ergebnis der Befragung die Meinung des Skeptikers auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt.
5	4. Zehn Raucher entschließen sich zu einer Entwöhnungskur. Zwei von ihnen sind starke Raucher, d. h. ihr Zigarettenkonsum übersteigt 20 Zigaretten pro Tag. Die Erfolgchancen der Behandlung liegen bei einem starken Raucher bei 60 %, bei einem nicht starken Raucher bei 70 %.
3	a) Wählen Sie die beiden Terme aus, welche die Wahrscheinlichkeit beschreiben, dass bei genau fünf der acht nicht starken Raucher die Entwöhnung erfolgreich ist.
	(i) $\binom{8}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^5$ (ii) $0,7^5 \cdot 0,3^3$ (iii) $1 - \binom{8}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^5$
	(iv) $\binom{8}{5} \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^3$ (v) $\binom{8}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^3$ (vi) $\binom{8}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^5$
5	b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Entwöhnung bei mindestens neun Personen der ganzen Gruppe Erfolg hat.
3	c) Im Verlauf der Behandlung wird ein Medikament getestet, das die Entwöhnung unterstützen soll. Fünf zufällig ausgewählte Gruppenmit- glieder bekommen das Medikament, die anderen ein Placebo. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden starken Raucher das Medikament bekommen.
30	

BE

## SII.

1. Graphologen beschäftigen sich mit der Analyse von Handschriften. Ein Graphologe bewirbt sich um eine Stelle. Der Personalchef der betreffenden Firma möchte ihn testen und legt ihm dazu Schriftproben vor. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person. Dies wird dem Bewerber mitgeteilt.
- 5 a) Man plant, den Bewerber einzustellen, wenn er bei mehr als zwei Drittel von zwölf vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet. Begründen Sie, dass der Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommen würde, wenn er nur rät.
- Dem Personalchef ist es zu riskant, dass ein nur ratender Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommt. Er fordert, den Test so zu modifizieren, dass die Einstellungschance eines nur ratenden Bewerbers unter 3 % gedrückt wird. Man entscheidet sich, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 zu erhöhen und bei mehr als zwei Drittel eine richtige Entscheidung zu verlangen.
- 3 b) Zeigen Sie, dass bei dem modifizierten Testverfahren die Forderung des Personalchefs erfüllt wird.
- 3 c) Der Graphologe interessiert sich anders als der Personalchef mehr dafür, dass seine Fähigkeiten fälschlicherweise nicht erkannt werden. Er schätzt, dass er bei jeder einzelnen Schriftprobe mit 75 % Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet. Bestimmen Sie, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass er bei dem modifizierten Test als ratend eingestuft wird.
- 2 d) Das modifizierte Testverfahren kann als einseitiger Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau 3 % gedeutet werden. Geben Sie die zugehörige Nullhypothese und den Ablehnungsbereich an.
2. Man liest gelegentlich, dass eine nach rechts geneigte Handschrift einen Hinweis auf Aufgeschlossenheit darstellt. In einer Abteilung mit 50 Angestellten gelten 35 als aufgeschlossen. 40 % der als aufgeschlossen geltenden Angestellten haben eine Handschrift, die nicht nach rechts geneigt ist. Weiter ist bei 6 Angestellten, die nicht als aufgeschlossen gelten, die Handschrift nach rechts geneigt.
- Die Ereignisse R: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter hat eine nach rechts geneigte Handschrift“ und A: „Ein zufällig ausgewählter Angestellter gilt als aufgeschlossen“ sollen auf stochastische Abhängigkeit untersucht werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm oder in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.
2	b) Begründen Sie, dass die Ereignisse A und R stochastisch abhängig sind.
2	c) Von den im Vortext gegebenen Zahlenwerten soll nur der Prozentsatz 40 % so abgeändert werden, dass die Ereignisse R und A stochastisch unabhängig sind. Geben Sie den geänderten Wert an.
	3. Es ist bekannt, dass 25 % aller Unternehmen bei Neueinstellungen ein graphologisches Gutachten, d. h. eine Analyse der Handschrift des Bewerbers, zu Rate ziehen. Ein Stellensuchender bewirbt sich bei 20 Firmen.
2	a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau fünf dieser Unternehmen ein graphologisches Gutachten einholen.
3	b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Unternehmen, die ein graphologisches Gutachten einholen, kleiner als der zugehörige Erwartungswert ist.
4	c) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner als ihr Erwartungswert ist, beträgt höchstens 50 %.“
30	

### M3. GEOMETRIE

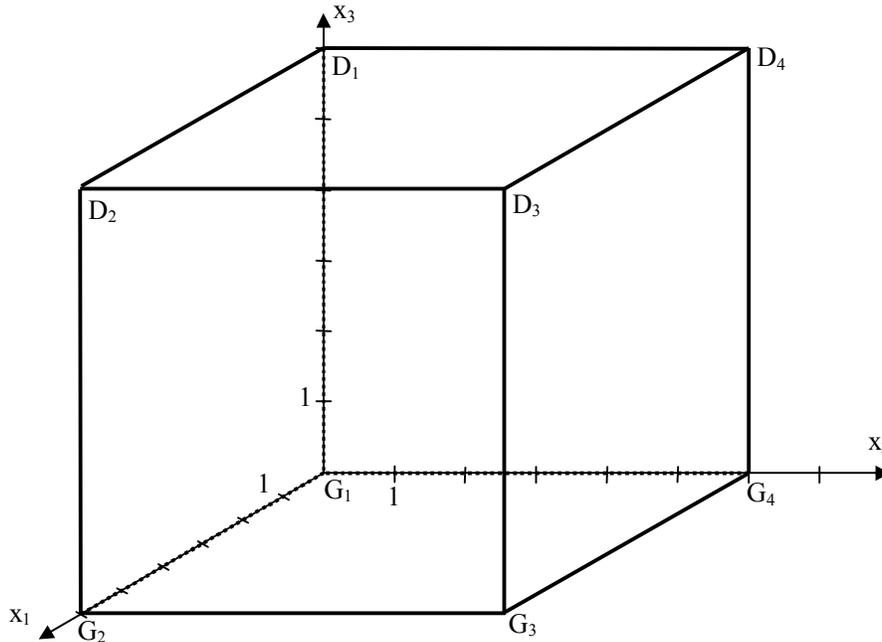
#### GI.

BE	
	<p>1. In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die <math>x_1x_2</math>-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die <math>x_1</math>-Achse zeigt in Richtung Osten, die <math>x_2</math>-Achse in Richtung Norden, die Längeneinheit ist 1 km.</p> <p>Ein Flugzeug <math>F_1</math> steigt unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt <math>P(-10 0 0)</math> längs der Geraden <math>g_1: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}</math>, <math>\lambda \in \mathbb{R}</math>, auf.</p> <p>Flugzeug <math>F_2</math> fliegt entlang der Geraden <math>g_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}</math>, <math>\mu \in \mathbb{R}</math>.</p>
3	a) Geben Sie die Himmelsrichtung an, in der $F_1$ fliegt und begründen Sie, dass $F_2$ eine konstante Flughöhe hält.
4	b) Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von $F_1$ gegen die Horizontale.
3	c) $F_1$ überfliegt in einer Höhe von 6 km eine Radarstation im Punkt $Z$ der $x_1x_2$ -Ebene. Bestimmen Sie die Koordinaten von $Z$ . [Ergebnis: $Z(20 30 0)$ ]
5	d) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge senkrecht schneiden. Legen Sie dar, dass daraus auch bei unveränderten Flugbahnen nicht zwingend eine Kollision der beiden Flugzeuge folgt.
2	e) Der Richtungsvektor von $g_2$ beschreibt die konstante Geschwindigkeit des Flugzeugs $F_2$ in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ . Geben Sie die physikalische Bedeutung des Parameters $\mu$ an.
6	f) Das Radar in $Z$ erfasst alle Objekte im Luftraum bis zu einer Entfernung von 50 km. Berechnen Sie die Länge der Flugstrecke von $F_2$ im Überwachungsbereich des Radars.
3	2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(2 3 -1)$ von der Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$ .
4	3. Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks $ABC$ , das sich durch einen Punkt $D$ zu einem Drachenviereck $ABCD$ ergänzen lässt. Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von $D$ .
30	

BE

**GII.**

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel  $W$  der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte  $G_1(0|0|0)$  und  $D_3(6|6|6)$  legen eine Raumdiagonale fest.



5

a) Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Gleichung der Ebene  $E$ , die durch die Punkte  $D_1$ ,  $G_2$  und  $D_3$  verläuft, und zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene  $E$  mit dem Würfel  $W$  ein.

[mögliches Ergebnis:  $E: x_1 - x_2 + x_3 = 6$ ]

4

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die  $E$  vom Würfel  $W$  abschneidet.

Wieviel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

4

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel der Ebene  $E$  gegen die Grundfläche  $G_1G_2G_3G_4$ .

Geben Sie drei Eckpunkte des Würfels  $W$  an, die eine Ebene so festlegen, dass sie mit der Grundfläche einen  $45^\circ$ -Winkel einschließt.

3

d) Zeigen Sie, dass die Ebene  $F$  mit der Gleichung  $F: x_1 - x_2 + x_3 = 3$  parallel zu  $E$  mit Abstand  $\sqrt{3}$  ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

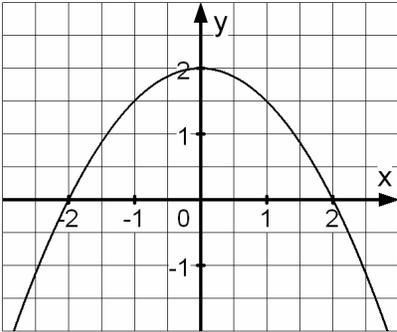
BE	
10	<p>e) Die Ebene <math>F</math> schneidet den Würfel <math>W</math> in einem regulären Sechseck. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene <math>F</math> mit der <math>x_1</math>- und der <math>x_3</math>-Koordinatenachse und bestätigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke <math>[G_2G_3]</math> auf <math>F</math> liegt.</p> <p>Zeichnen Sie alle sechs Schnittpunkte der Ebene <math>F</math> mit Kanten des Würfels sowie den Rand der sechseckigen Schnittfigur ein.</p> <p>Berechnen Sie den Flächeninhalt des betrachteten Sechsecks.</p>
4	<p>f) Alle Ebenen parallel zu <math>F</math> werden durch Gleichungen der Form <math>x_1 - x_2 + x_3 = a</math>, mit <math>a \in \mathbb{R}</math> beschrieben.</p> <p>Geben Sie an, welche Arten von Figuren als Schnitt einer solchen Ebene mit dem Würfel <math>W</math> auftreten. Geben Sie die Menge aller Werte von <math>a</math> an, für die die Schnittfigur ein Sechseck ist.</p>
30	

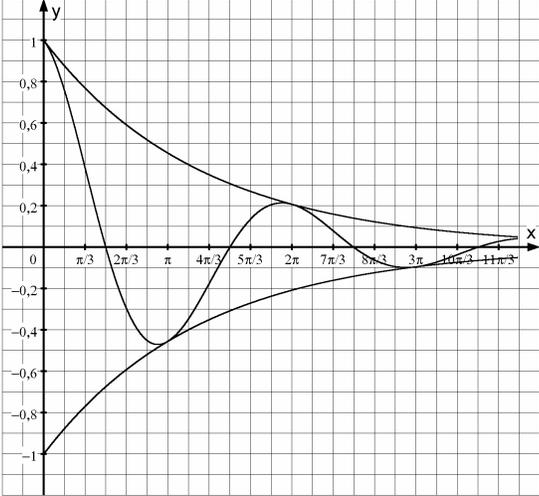
## 2.4 Beispielabitur: Lösungen und Kommentare

Die nachfolgenden Tabellen enthalten zunächst die Lösungen der Aufgaben des Beispielabiturs aus 2.3 in der aus dem Abitur bekannten knappen Form. Zusätzlich finden sich kursiv gesetzt verschiedene Hinweise, die im Rahmen der vorliegenden Handreichung wichtig erscheinen: Je nach Aufgabenstellung folgen beispielsweise Hinweise auf neue Schwerpunktsetzungen, zu möglichen Schülerlösungen und ihrer Bewertung oder auch Erläuterungen zu konkreten Formulierungen.

### Analysis AI

Aufgabe	BE	Hinweise
1.	3	$x_1 = \ln 2; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{2}; x_4 = -\sqrt{2}$ <i>Der neu konzipierte Teil I in der Analysis erlaubt eine Konzeption von Fragestellungen nach innermathematischen Interessen, ohne auf Zwänge einer großen Gesamtaufgabe Rücksicht nehmen zu müssen. In der vorliegenden Aufgabe können am Beispiel einer Funktion, die kaum als Grundlage für eine längere Aufgabe gewählt worden wäre, verschiedene Aspekte der Nullstellenbestimmung in einer Aufgabe betrachtet werden.</i>
2.	6	$D = \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$ Tangente in $(1 0)$ : $y = -x + 1$
3.	3	z. B.: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ <i>Das Finden und Angeben von Beispielen oder Gegenbeispielen sowie ggf. auch der Nachweis, dass ein Beispiel die gewünschten Anforderungen erfüllt, sind Aufgaben, die wichtige Kompetenzen beispielsweise im Bereich des Argumentierens und Problemlösens ansprechen. Im Rahmen der weiteren Realisierung einer neuen Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur wird die Bedeutung dieses Aufgabentyps steigen.</i>
4.	3	z. B.: $F: x \mapsto -x + x \cdot \ln 2x$ , <i>Die Merkhilfe ermöglicht neben einer Lösung mithilfe der Umformung <math>\ln(2x) = \ln 2 + \ln x</math> auch die Verwendung der Formel</i> $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

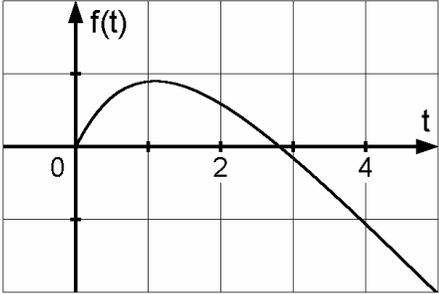
Aufgabe	BE	Hinweise
5.	5	<p>g gehört zu i); f gehört zu ii) mit <math>a = 1</math>; h gehört zu iii) mit <math>b = 1</math>.</p> <p><i>Argumentation z. B. über Asymptoten, Nullstellen, Tangentensteigung in der Nullstelle, Einsetzen von Werten</i></p> <p><i>Die Vorgabe <math>a, b \in \mathbb{N}</math> in der Aufgabenstellung sichert, dass ein Ablesen von Werten die gewünschten Schlussfolgerungen erlaubt.</i></p> <p><i>Die Vorgabe, dass die drei Graphen zu den drei Termen gehören, erlaubt nach der mathematischen Begründung der Zuordnung von zwei Graphen die Schlussfolgerung „also muss der verbleibende Graph zur verbleibenden Funktion gehören“.</i></p>
6. a)	2	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p><i>Der Bereich, in dem ein Graph gezeichnet werden soll, wird in der Regel nicht mehr vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler treffen selbständig eine sinnvolle Entscheidung.</i></p> </div> </div>
b)	6	<p><math>A(x) = -x^3 + 4x</math> mit <math>0 &lt; x &lt; 2</math></p> <p><math>A'(x) = -3x^2 + 4</math>; <math>A'(x) = 0</math> für <math>x = \frac{2}{3}\sqrt{3}</math> und <math>A''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) &lt; 0</math>,</p> <p>kein Randmaximum, also maximaler Flächeninhalt: <math>A\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}</math></p> <p><i>Bei Extremwertaufgaben gehört die Angabe eines sinnvollen Definitionsbereichs sowie der Nachweis, dass das errechnete Ergebnis tatsächlich das Maximum bzw. Minimum darstellt, zur vollständigen Bearbeitung. Eine verbale Argumentation, die dies aus dem Zusammenhang heraus begründet, ist ebenfalls möglich.</i></p>
c)	5	<p>Nullstellen von f: 2 und -2</p> <p>Parabelfläche: <math>A_P = \int_{-2}^2 f(x) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}</math></p> <p>Anteil des Rechtecks: 58 %</p>

Aufgabe	BE	Hinweise
7. a)	8	<p> <math>g'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} &lt; 0</math> für <math>x \in \mathbb{R}</math>. <math>g</math> fällt streng monoton in <math>\mathbb{R}</math>.                 </p> <p> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty</math>  <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0</math>  <math>g(0) = 1</math>  <math>g(\pi) = 0,46</math>  <math>g(2\pi) = 0,21</math>  <math>g(3\pi) = 0,09</math>  <math>g(4\pi) = 0,043</math> </p> 
b)	3	<p>                     Der Faktor <math>e^{-\frac{1}{4}x}</math> verändert die Amplitude der Kosinusfunktion, so dass der Graph von <math>h</math> zwischen den Graphen von <math>g</math> und <math>-g</math> verläuft. Die Nullstellen von <math>h</math> sind die gleichen wie bei der Kosinusfunktion, die Funktionswerte an den Stellen <math>n\pi</math> liegen auf den Graphen der Funktionen <math>g</math> und <math>-g</math>.                 </p>
c)	6	<p> <math>h'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \cos x - e^{-\frac{1}{4}x} \sin x = -e^{-\frac{1}{4}x} (\frac{1}{4} \cos x + \sin x)</math> </p> <p>                     Notwendig für Extremstellen von <math>h</math>: <math>h'(x) = 0</math>, also <math>\tan x = -\frac{1}{4}</math> </p> <p>                     Extremstellen der Kosinusfunktion bei <math>x = n\pi</math> und somit <math>\tan x = 0</math> </p>
d)	4	<p> <math>h</math> besitzt für <math>x \rightarrow -\infty</math> keinen Grenzwert, da <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{4}x} = +\infty</math> und die Kosinusfunktion zwischen <math>-1</math> und <math>1</math> oszilliert.                 </p> <p> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0</math>, da <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm g(x) = 0</math> und <math>G_h</math> zwischen <math>G_g</math> und <math>G_{-g}</math> liegt (vgl. TA b).                 </p> <p> <i>Begründungen wie „Der Graph von <math>h</math> verläuft zwischen zwei Graphen, die gegen die <math>x</math>-Achse streben“ sind ausreichend.</i> </p>

Aufgabe	BE	Hinweise
e)	3	$J = \int_0^{2\pi} h(x) dx = H(2\pi) - H(0) = \frac{4}{17} \left( 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \approx 0,19 > 0$ <p><math>J &gt; 0</math> bedeutet, dass im betrachteten Bereich die beiden Flächenstücke zwischen x-Achse und Graph oberhalb der x-Achse zusammen einen größeren Inhalt haben als das Flächenstück unterhalb.</p> <p><i>Der Zusatz „Nachweis nicht erforderlich“ nach Aussagesätzen wird in der Regel nicht mehr verwendet. Die Schülerinnen und Schüler müssen selbst zwischen Angaben und Arbeitsanweisungen unterscheiden können. Im vorliegenden Fall ist also der Nachweis der Stammfunktionseigenschaft nicht verlangt.</i></p>
f)	3	$\frac{3}{2}\pi$ ist ein geeigneter Wert, da das Integral bis zu diesem Wert sich aus einer positiv und einer negativ zu zählenden Fläche zusammensetzt und ab diesem Wert wieder ein positiv zu zählender Teil hinzukommt, der offensichtlich größer ist als der nachfolgende negativ zu zählende usw. Wenn also laut Angabe überhaupt ein solches $a$ existiert, dann sicher dort.
	60	

**Analysis AII**

Aufgabe	BE	Hinweise
1.	5	$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ; keine Nullstelle $D_2 = [1; +\infty[$ ; Nullstelle: 1 $D_3 = ]1; +\infty[$ ; Nullstelle: 2  <i>Anmerkung zur Zahl der Bewertungseinheiten: Es ist nicht zwingend erforderlich, pro abgefragtem Detail eine BE vorzusehen. Im vorliegenden Fall erscheint es durchaus angemessen, dass ein Schüler, der 5 der 6 Angaben fehlerhaft macht, 0 BE erhält.</i>
2.	5	$2x = \tan 135^\circ$ führt auf $x = -0,5$ . Tangentengleichung: $y = -x - 0,25$
3.a)	3	z. B.: Die Flächenstücke zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$ -Achse in den Bereichen $[-a; 0]$ und $[0; a]$ sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen aber bei der Berechnung des Integrals mit unterschiedlichem Vorzeichen ein.
b)	4	---
4.	3	Term (iii) nähert $f$ für große $x$ am besten. Die Erläuterung kann z. B. über die jeweiligen Differenzfunktionen oder Betrachtungen zur Asymptote erfolgen.

Aufgabe	BE	Hinweise
5.a)	10	<p> <math>f(0) = 0</math>  <math>f(t) \rightarrow -\infty</math> für <math>t \rightarrow +\infty</math>  <math>f'(t) = 3e^{-t} - 1</math> und  <math>f''(t) &lt; 0</math> für <math>t \in D_f</math>            also Hochpunkt <math>(\ln 3   2 - \ln 3)</math>  <i>Genau</i> ein Hochpunkt, da das Randextremum ein Minimum ist (z. B. wegen <math>f'(t) &lt; 0</math> für kleine <math>t</math>).  <math>f(3) \approx -0,15</math> </p>  <p> <i>Auf weitere mögliche Fragestellungen, wie z. B. die Steigung an der Stelle 0, wird hier nicht eingegangen; derartige Elemente müssen demnach auch im Graph nicht korrekt dargestellt sein. Die behandelten Elemente der Kurvendiskussion dienen dazu, den Anschauungsrahmen für die Fragestellungen der folgenden Teilaufgaben zu schaffen.</i> </p>
b)	3	$t_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 2,821\dots$
c)	5	$\int_0^a f(t) dt = \left[ 3t + 3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^a \approx 1,7$ <p> <i>Sollte eine Stammfunktion von <math>e^{-t}</math> nicht bekannt sein, kann sie mithilfe der Merkhilfe ermittelt werden.</i> </p>
d)	5	<p> <math>N</math> ist ein Punkt der <math>x</math>-Achse und Hochpunkt des Graphen von <math>F</math>. Der Graph von <math>F</math> berührt in <math>a</math> also die <math>x</math>-Achse und verläuft in der Nähe von <math>a</math> unterhalb der <math>x</math>-Achse. Begründung z. B. über das Vorzeichen von <math>F</math> als Integral oder über das Monotonieverhalten von <math>F</math> (Hauptsatz).         </p> <p>           Bedeutung des Ergebnisses von Teilaufgabe 5c: <math>F(0) = -1,7</math> </p>

Aufgabe	BE	Hinweise
6.		<p>Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, dass sie der geführten Aufgabenstellung folgen und die nötigen Informationen aus dem Text entnehmen können, auch wenn ein physikalischer Sachzusammenhang zugrunde liegt, den sie mit ihrem physikalischen Grundwissen in der Regel nicht in allen Details durchdringen können. Mit ähnlichen Situationen werden die Schülerinnen und Schüler in Studium und Beruf wiederholt konfrontiert sein.</p> <p>Anmerkung: Die hier Intensität genannte Relativgröße stimmt bis auf physikalische Konstanten mit der von Planck betrachteten spektralen Energiedichte überein.</p>
a)	3	<p>Wegen <math>\frac{x}{T} &gt; 0</math> ist <math>e^{\frac{x}{T}} &gt; 1</math> und der Nenner des Bruchs <math>I_T(x)</math> positiv. Mit <math>x</math> ist auch <math>x^3</math> positiv. Beides zusammen zeigt <math>I_T(x) &gt; 0</math>.</p>
b)	6	<p><math>I'_T(x) = 0</math> führt auf <math>f(t) = 0</math>, wenn man <math>\frac{x}{T}</math> durch <math>t</math> ersetzt.</p> <p>Eine elementare Substitution muss in geführten Situationen wie der vorliegenden von den Schülerinnen und Schülern erfasst werden.</p> <p>In der Rückschau entpuppt sich die Funktion aus Aufgabe 5 als Hilfsfunktion, um über das Newton-Verfahren das Extremwertproblem der Planckfunktion lösen zu können. Die Diskussion der Hilfsfunktion wurde vorgeschaltet, um eine sinnvolle Staffelung des Schwierigkeitsgrads zu gewährleisten.</p>
c)	5	<p><math>T_{\text{Sonne}} = \frac{17 \cdot 10^3}{2,82} \approx 6000</math> (in Kelvin)</p> <p><math>x_{\text{max}} = 17000</math> führt zur Zuordnung „Graph II gehört zu <math>T = 6000</math> Kelvin.“. Wegen <math>x_{\text{max}} = 2,82 \cdot T</math> gehört zu größerem <math>T</math> eine größere Maximalstelle, also gehört Graph III zu <math>T = 8000</math> Kelvin, Graph I zu <math>T = 4000</math> Kelvin.</p>
d)	3	<p>Für <math>x_{\text{max}} = a \cdot T</math> erhält man <math>I(x_{\text{max}}) = I(aT) = \frac{a^3 \cdot T^3}{e^a - 1}</math>, also eine direkte Proportionalität zu <math>T^3</math>. Eine Verdoppelung von <math>T</math> führt demnach zu einer Verachtfachung der maximalen Intensität.</p>
	60	

**Stochastik SI**

Aufgabe	BE	Hinweise
1.a)	2	62 % <i>Den Schülerinnen und Schülern muss bewusst sein, dass in derartigen Aufgaben Werte mit einer sinnvollen Ablesegenauigkeit zu entnehmen sind. Hier beispielsweise gibt der Vortext mit „36 %“ ein entsprechendes Signal. Die Lehrkraft kann mit sinnvoller Toleranz gegenüber Ableseungenauigkeiten korrigieren. Im vorliegenden Fall erscheint eine Toleranz von <math>\pm 1</math> Prozentpunkten angemessen.</i>
b)	2	34 %
c)	3	z. B.: Die Zeitungsmeldung kann mit den Daten des Diagramms in Einklang stehen, wenn die Anzahl der 40-44-jährigen Männer entsprechend größer als die der 20-24-Jährigen ist. <i>Das Diagramm zeigt einen höheren Raucheranteil in der Altersgruppe der 20-24-jährigen Männer, trotzdem ist die im Zeitungsartikel genannte Absolutzahl rauchender Männer deutlich niedriger. Der scheinbare Widerspruch ergibt sich aufgrund der (überraschend?) stark unterschiedlichen Anzahlen von Männern in den betrachteten Altersgruppen: 40-44-jährige Männer: 3,7 Mio.; 20-24-jährige Männer: 2,5 Mio.</i>
2.	4	$1 - 0,70^2 \cdot 0,83 \cdot 0,88 \approx 64 \%$
3.a)	4	$P(A) = B(10; 0,3; 3) \approx 27 \%$ $P(B) = F_{0,3}^{10}(4) \approx 85 \%$
b)	5	$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{0,3}^{10}(4) \approx 15 \%$ . Somit wird die Aussage nicht auf dem 5 % – Niveau gestützt.
4.a)	2	(i) und (v) sind richtig.
b)	5	Anzahl der nicht starken Raucher mit erfolgreicher Entwöhnung: Y Anzahl der starken Raucher mit erfolgreicher Entwöhnung: Z $P(Z=1) \cdot P(Y=8) + P(Z=2) \cdot P(Y=7) + P(Z=2) \cdot P(Y=8)$ $= 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,7^8 + 0,6^2 \cdot 8 \cdot 0,7^7 \cdot 0,3 + 0,6^2 \cdot 0,7^8 \approx 12,0 \%$
c)	3	Z. B.: $\frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} \approx 22,2 \%$
	30	

**Stochastik SII**

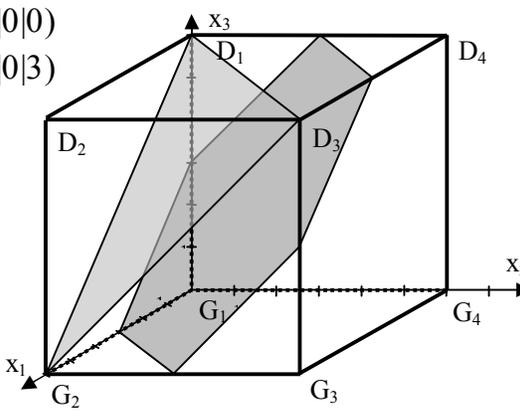
Aufgabe	BE	Hinweise																																
1.a)	5	$P(X \geq 9) = \binom{12}{9} \cdot 0,5^{12} + \binom{12}{10} \cdot 0,5^{12} + \binom{12}{11} \cdot 0,5^{12} + \binom{12}{12} \cdot 0,5^{12} \approx 0,073 > 0,070$																																
b)	3	$P(X \geq 21) = 1 - F_{0,5}^{30}(20) \approx 0,021 < 0,030$																																
c)	3	$P(X \leq 20) = F_{0,75}^{30}(20) \approx 19,7 \%$																																
d)	2	$H_0: p \leq 0,5$ ; Ablehnungsbereich $\{21, \dots, 30\}$																																
2.a)	4	<div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <table border="1" style="margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>A</td><td><math>\bar{A}</math></td><td></td></tr> <tr><td>R</td><td>21</td><td>6</td><td>27</td></tr> <tr><td><math>\bar{R}</math></td><td>14</td><td>9</td><td>23</td></tr> <tr><td></td><td>35</td><td>15</td><td>50</td></tr> </table> <div style="margin-right: 20px;">oder:</div> </div> <p>Ebenfalls möglich sind z. B. folgende Darstellungen:</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <table border="1" style="margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td>A</td><td><math>\bar{A}</math></td><td></td></tr> <tr><td>R</td><td>0,42</td><td>0,12</td><td>0,54</td></tr> <tr><td><math>\bar{R}</math></td><td>0,28</td><td>0,18</td><td>0,46</td></tr> <tr><td></td><td>0,70</td><td>0,30</td><td>1</td></tr> </table> </div>		A	$\bar{A}$		R	21	6	27	$\bar{R}$	14	9	23		35	15	50		A	$\bar{A}$		R	0,42	0,12	0,54	$\bar{R}$	0,28	0,18	0,46		0,70	0,30	1
	A	$\bar{A}$																																
R	21	6	27																															
$\bar{R}$	14	9	23																															
	35	15	50																															
	A	$\bar{A}$																																
R	0,42	0,12	0,54																															
$\bar{R}$	0,28	0,18	0,46																															
	0,70	0,30	1																															
b)	2	$P(A) = 0,7$ ; $P(R) = 0,54$ ; $P(A \cap R) = 0,42$ ; $P(A) \cdot P(R) = 0,378 \Rightarrow P(A \cap R) \neq P(A) \cdot P(R)$ also sind A und R stochastisch abhängig.  <i>Alternative Begründung anhand des Baumdiagramms: Im Falle stochastischer Unabhängigkeit müssten die Wahrscheinlichkeiten an den nach rechts gerichteten Ästen der 2. Stufe gleich sein, ebenso an den nach links gerichteten. Dies ist nicht der Fall, also sind A und R abhängig.</i>																																
c)	2	60 %																																
3.a)	2	$P(X = 5) = B(20; 0,25; 5) \approx 20,2 \%$																																
b)	3	$\mu = 5$ ; $P(X < 5) = F_{0,25}^{20}(4) \approx 41,5 \%$																																
c)	4	Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Wenn X nach $B(1; 0,1)$ verteilt ist, dann ist $\mu = 0,1$ , aber $P(X = 0) = 0,9$ .																																
	30																																	

**Geometrie GI**

Aufgabe	BE	Hinweise
		<i>In der Schreibweise der beiden Geraden wird sichtbar, dass künftig im Abitur (wie auch schon in der Merkhilfe) die Kurzschreibweise <math>\vec{A}</math> bzw. <math>\vec{X}</math> für die Ortsvektoren <math>\vec{OA}</math> bzw. <math>\vec{OX}</math> der Punkte <math>A</math> bzw. <math>X</math> als vertraut vorausgesetzt wird.</i>
1.a)	3	$F_1$ startet in Richtung NO. Die Flughöhe von $F_2$ wird durch die $x_3$ -Koordinate der Gerade $g_2$ beschrieben, die einen konstanten Wert ( $x_3 = 10$ ) besitzt.
b)	4	$8^\circ$ <i>Auf die Notwendigkeit einer angemessenen Rundung wird bei Sachbezügen im Aufgabentext in der Regel nicht mehr gesondert hingewiesen.</i>
c)	3	-----
d)	5	Da die beiden Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer beiden Flugbahnen nicht zur gleichen Zeit erreichen müssen, kollidieren sie auch bei Beibehaltung des Kurses nicht notwendig.
e)	2	$\mu$ beschreibt die Zeit (vom Durchfliegen des Punktes (40 50 10) an). <i>Vertrautheit mit der Behandlung von Geschwindigkeiten als vektorielle Größen ist für die Beantwortung der Frage nicht erforderlich. Notwendig ist ein Transfer der vertrauten Deutung des Parameters <math>\mu</math> im geometrischen Kontext auf eine grundlegende Situation aus der Bewegungslehre.</i>
f)	6	Für $\mu = \pm 2\sqrt{2}$ ergeben sich zwei Punkte, in denen sich $F_2$ in einer Entfernung von ca. 50 km zu $Z$ befindet. Diese Punkte sind voneinander ca. 80 km entfernt. <i>Ein Lösungsweg über den Schnitt einer Kugel mit der Flugbahn <math>g_2</math> ist ebenso möglich wie eine Lösung mithilfe des Satzes von Pythagoras, für die man als Zwischenschritt den Abstand von <math>Z</math> und <math>g_2</math> berechnen muss, der 30 km beträgt.</i> <i>Berücksichtigt man, dass der überwachte Luftraum näherungsweise auch als zylindrisch betrachtet werden kann, so kann gleichwertig eine Lösung gewertet werden, die die beiden Punkte in senkrechter Projektion der Situation auf die Erdoberfläche bestimmt. Lösung wäre dabei eine Entfernung der beiden Punkte um 82,5 km für <math>\mu = \pm \frac{1}{2}\sqrt{34}</math>.</i>

Aufgabe	BE	Hinweise
2.	3	<p>Abstand <math>\frac{3}{7}\sqrt{14}</math></p> <p><i>Auch in der Stochastik und Geometrie können die zusammenhängenden Aufgaben unter Umständen ergänzt werden durch unabhängige kleinere Zusatzfragen wie im vorliegenden Fall.</i></p>
3.	4	<p>z. B.: Berechnet werden müssen die Koordinaten des Spiegelpunkts von B bei Spiegelung an der Gerade AC:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Man stellt zunächst eine Gleichung der Ebene durch B mit Normalenvektor <math>\overrightarrow{AC}</math> auf.</li> <li>- Dann schneidet man diese Ebene mit AC und erhält als Schnittpunkt den Fußpunkt F des Lotes von B auf AC.</li> <li>- Die Koordinaten von D erhält man, indem man den Vektor <math>\overrightarrow{BF}</math> zum Ortsvektor von F addiert: <math>\vec{D} = \vec{F} + \overrightarrow{BF}</math>.</li> </ul> <p><i>Bei derartigen Aufgabenstellungen ist in besonderem Maße auf die bei der Formulierung des Arbeitsauftrags verwendeten Operatoren zu achten. Die vorliegende Aufgabe etwa fordert die Beschreibung eines Verfahrens in einer Detailgenauigkeit, die mehrere Einzelschritte umfasst.</i></p> <p><i>Techniken wie beispielsweise das Aufstellen einer Ebenengleichung in Normalenform bei gegebenem Normalenvektor und Aufpunkt oder das Schneiden einer gegebenen Ebene mit einer gegebenen Geraden können dabei grundsätzlich immer als so grundlegend betrachtet werden, dass sie keiner näheren Erläuterung bedürfen, sofern eine solche nicht ausdrücklich gefordert ist.</i></p> <p><i>Abzugrenzen wäre die vorliegende Aufgabenformulierung von der nachfolgenden, mit maximal zwei Bewertungseinheiten gewichteten Variante:</i></p> <p><i>„Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck ABCD ergänzen lässt. Die Koordinaten von D sollen rechnerisch ermittelt werden. Stellen Sie eine Lösungsidee dar.“ Hierzu wäre bereits der erste Satz der obigen Lösung als ausreichend zu betrachten.</i></p>
	30	

### Geometrie GII

Aufgabe	BE	Hinweise
a)	5	-----
b)	4	$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Würfel}} = 36$ <p>Das Volumen der Pyramide nimmt etwa 17 % des Würfelvolumens ein.</p> <p><i>Lösungswege mit und ohne Verwendung des Vektorproduktes sind möglich (vgl. auch Kap. 1.3).</i></p>
c)	4	$\varphi = 54,7^\circ$ <p><i>Neben der Methode über das Skalarprodukt des Normalenvektors <math>\vec{n}_E</math> mit einem Vektor in <math>x_3</math>-Richtung bietet sich eine trigonometrische Lösung über das rechtwinkligen Stützdreieck <math>G_2M_D M_G</math> an, wobei <math>M_D</math> und <math>M_G</math> die Mittelpunkte von Deck- und Grundfläche des Würfels sind.</i></p> <p>Einen <math>45^\circ</math>-Winkel gegen die Grundfläche schließt beispielsweise die durch die Punkte <math>D_1, G_2</math> und <math>G_3</math> festgelegte Ebene ein.</p>
d)	3	-----
e)	10	<p>Schnittpunkt mit <math>x_1</math>-Achse: <math>(3 0 0)</math>                      Schnittpunkt mit <math>x_3</math>-Achse: <math>(0 0 3)</math></p>  <p>Der Flächeninhalt des Schnitt-Sechsecks beträgt <math>27\sqrt{3}</math>.</p>
g)	4	<p>Als Schnittfiguren treten Punkt, (gleichseitiges) Dreieck und Sechseck auf.</p> <p><i>Ein Hinweis auf die leere Menge als Schnitt-,figur“ ist nicht erforderlich.</i></p> <p>Für <math>a \in ]0; 6[</math> schneiden die Ebenen den Würfel in einem Sechseck.</p>
	30	

## 3 Weitere Aufgabenbeispiele

Das folgende Kapitel bringt Aufgabenbeispiele zu Stoffgebieten oder Aufgabentypen, bei denen beispielsweise aufgrund von Lehrplanumstellungen im Vergleich zum neunjährigen Gymnasium unklar sein könnte, in welcher Tiefe oder Breite sie zu behandeln sind.

Angesichts dieser Schwerpunktsetzung darf nicht übersehen werden, dass die Abiturprüfung am achtjährigen Gymnasium selbstverständlich in ausreichendem Maße auf alt vertraute Themen und Aufgabentypen zurückgreifen wird, die auch weiterhin das ihnen zustehende Gewicht im Lehrplan und in den Schulbüchern haben. Insbesondere Kollegen ohne Unterrichtserfahrung in der Kollegstufe des neunjährigen Gymnasiums müssen darauf achten, dass sie durch die Schwerpunktsetzung der vorliegenden Handreichung nicht dazu verleitet werden, zentrale Standardthemen wie die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion oder gebrochen-rationale Funktionen zu vernachlässigen. Die Abituraufgaben der letzten Jahre stellen hier (wie beispielsweise im Kapitel 1.3 an zahlreichen Beispielen ausgewiesen) hilfreiches Übungsmaterial bereit.

### 3.1 Anmerkungen und Beispiele zu ausgewählten Lehrplaninhalten

#### 3.1.1 Funktionstypen

In der Abiturprüfung des achtjährigen Gymnasiums wird dem Lehrplan entsprechend ein breiteres Spektrum an Funktionen als im bisherigen Grundkurs auftreten. Insbesondere die trigonometrischen Funktionen und auch Wurzelfunktionen werden an Bedeutung gewinnen. Dabei ist nicht mit einer umfassenden Kurvendiskussion komplexer Verknüpfungen zu rechnen, aber durchaus mit der bewussten Einbeziehung der spezifischen Eigenschaften dieser Funktionstypen (z. B. Definitions- bzw. Wertebereich, Grenzwertverhalten, senkrechte Tangente, Periodizität; Einsatzmöglichkeiten in Anwendungszusammenhängen).

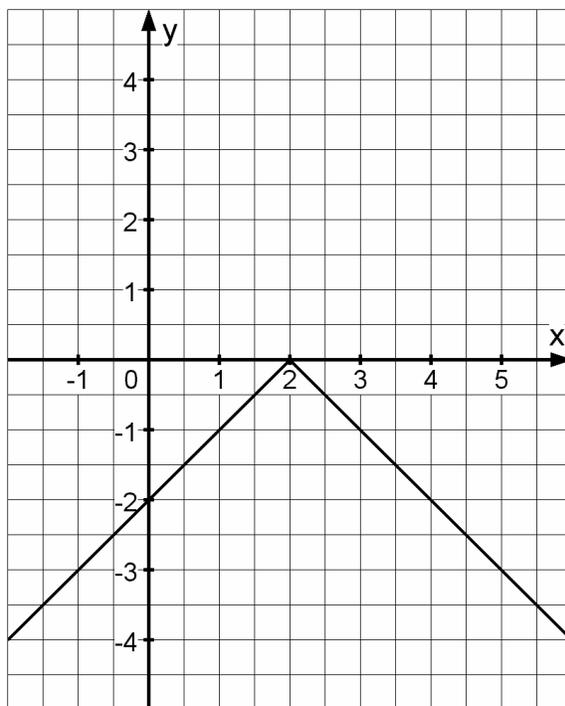
Hinsichtlich der Betragsfunktion wird die Kenntnis grundlegender Eigenschaften vorausgesetzt, ihre Behandlung wird im Abitur umfangsmäßig einen geringen Raum einnehmen.

Aufgabe 3.1.1.A setzt beispielsweise eine grundsätzliche Kenntnis der Betragsfunktion und ihres Graphen voraus, behandelt dann jedoch schwerpunktmäßig die Verschiebung einer Funktion sowie die Integralfunktion.

**Aufgabe 3.1.1 A**

Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_f$  einer Funktion  $f$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ , der kongruent zum Graphen der Betragsfunktion  $g : x \mapsto |x|$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ , ist.

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion  $g$  ein und beschreiben Sie, wie  $G_f$  aus dem Graphen von  $g$  entsteht.
- b) Zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion  $F : x \mapsto \int_2^x f(t) dt$  für  $-1 \leq x \leq 5$  in das gegebene Diagramm ein. (Hinweis: Eine integralfreie Darstellung der Funktion  $F$  ist hierzu nicht notwendig.)



Aufgrund der abschnittswiseen Linearität der betrachteten Funktion ist in Teilaufgabe b eine Lösung durch Abzählen von Kästchen oder durch Berechnen von Flächeninhalten von Dreiecken sinnvoll. Der Hinweis, eine integralfreie Darstellung sei *nicht notwendig*, verdeutlicht, dass eine solche hier nicht erwartet wird, lässt aber eine analytische Lösung mithilfe einer geeigneten Stammfunktion gleichwohl zu.

Zur Einbeziehung von Wurzelfunktionen finden sich im Kapitel 2.3 bereits Aufgaben zum Definitionsbereich und zur Zuordnung von Graphen. Aufgrund des Lehrplanaufbaus wird auch die Betrachtung von Wurzelfunktionen als Umkehrung von Quadratfunktionen eine Rolle spielen, wofür die folgende Aufgabe als Beispiel dienen soll.

**Aufgabe 3.1.1 B**

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \sqrt{6-x}$  in ihrem maximalen Definitionsbereich  $D_f$ .

- a) Geben Sie  $D_f$  an und begründen Sie, dass  $f$  umkehrbar ist.
- b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  an, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion.  
Zeichnen Sie die Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Graphen schneiden, sowie den Inhalt des „herzförmigen“ Flächenstücks, das von den Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  sowie den Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

In Teilaufgabe a kann mithilfe des Vorzeichens der 1. Ableitung argumentiert werden oder auch darauf verwiesen werden, dass  $f$  durch Verschiebung aus  $g : x \mapsto \sqrt{x}$  entsteht. Jedenfalls muss auf die Nicht-Differenzierbarkeit an der Stelle  $x = 6$  nicht explizit eingegangen werden.

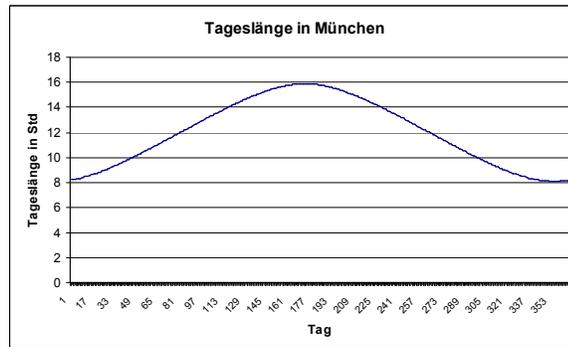
Die Aufgabe AI im Kapitel 2.3 bringt ein Beispiel für eine Verknüpfung von Exponential- und Kosinusfunktion, die letztlich eine gedämpfte Schwingung beschreibt; dies wird dort aber nicht thematisiert. Die nachfolgende Aufgabe betont dagegen die Bedeutung von trigonometrischen Funktionen im Anwendungszusammenhang. Insbesondere muss den Schülerinnen und Schülern die Bedeutung der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  im Funktionsterm  $a \sin(x + b) + c$  vertraut sein.

**Aufgabe 3.1.1 C**

Die Tageslänge (Zeitdauer zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) an einem festen Ort verändert sich im Lauf eines Jahres.

Die Graphik zeigt diese Veränderung für München.

Die Tageslänge  $T(x)$  in Stunden am  $x$ -ten Tag des Jahres in München kann in guter Näherung durch eine trigonometrische



Funktion der Form  $T(x) = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}\right) + c$  mit  $a > 0$  und  $c > 0$  modelliert werden.

- a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Funktion  $T$  die Periode 365 hat und dass unabhängig von  $a$  und  $c$  bei  $x = 172$  ein Maximum vorliegt.
- b) Entnehmen Sie dem Graphen Näherungswerte für die Parameter  $a$  und  $c$ .
- c) Geben Sie einen Grund dafür an, dass eine entsprechende Modellierung der Tageslänge am Nordpol nicht mit einer Kosinusfunktion möglich ist.

### 3.1.2 Extremwertaufgaben

In Extremwertaufgaben wird eine im inner- oder außermathematischen Anwendungsbezug auftretende Größe maximiert oder minimiert, indem das Extremum einer geeigneten Funktion bestimmt wird. Extremwertaufgaben sind in den Lehrplanabschnitten 11.6 und 12.4 explizit angesprochen und werden in den Abituraufgaben am achtjährigen Gymnasium eine etwas größere Rolle als bisher spielen. Die Einbeschreibungsaufgabe im Kapitel 2.3, AI, 5b ist ein Beispiel hierfür. Die folgenden Aufgaben zeigen weitere Möglichkeiten auf.

Aufgabe 3.1.2 A beinhaltet eine Verknüpfung von Wurzel- und Polynomfunktion, die im Rahmen der Begründung in Teilaufgabe a auch durchdacht werden muss, wenn nämlich aus der Minimumseigenschaft des Radikanden auf den minimalen Abstand geschlossen werden soll. Entsprechende Aufgabenstellungen zu anderen Kurven führen schnell zu Gleichungen, die nicht mehr analytisch, beispielsweise aber mithilfe des Newton-Verfahrens lösbar sind.

#### Aufgabe 3.1.2 A

Von den im I. Quadranten liegenden Punkten der Normalparabel mit der Gleichung  $y = x^2$  soll derjenige Punkt E berechnet werden, für den die Entfernung zum Punkt  $P(0 | 4,5)$  minimal wird.

- Bestimmen Sie einen Term für die Entfernung eines Punktes  $(x | x^2)$  von P und zeigen Sie, dass diese Entfernung genau dann minimal wird, wenn die Funktion r mit  $r(x) = x^4 - 8x^2 + 4,5^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ein Minimum annimmt.
- Berechnen Sie mithilfe der Funktion r die Koordinaten von E. [zur Kontrolle:  $E(2 | 4)$ ]
- Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade PE ein Lot zur Normalparabel im Punkt E ist.

Die beiden folgenden Beispiele zeigen die Bedeutung von Extremwertaufgaben in Anwendungszusammenhängen auf, wobei als zusätzliche Aspekte Nebenbedingungen bzw. Randextrema auftreten.

In **Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen** hängt die Größe, die extremal werden soll, zunächst von zwei (oder mehr) Variablen ab. Erst durch Elimination von Variablen mithilfe von „Nebenbedingungen“ lässt sich die Differentialrechnung einer Veränderlichen nutzbar machen. Die folgende Aufgabe ist sehr offen formuliert. Als Variable für die Funktion f können z. B. der Radius, die Zylinderhöhe oder sogar die Grundfläche selbst gewählt werden. In dieser Offenheit kann die Aufgabe (auch in einer zentralen Abiturprüfung) ohne Weiteres gestellt werden, weil eine Berechnung der Lösung nicht erwartet wird; anderenfalls müsste in der Regel stärker geführt werden.

#### Aufgabe 3.1.2 B

Eine Konservendose hat die Form eines geraden Kreiszylinders. Die Dose soll das Volumen  $120 \text{ cm}^3$  fassen. Ihre Abmessungen sollen so gewählt werden, dass die Oberfläche minimal wird. Bestimmen Sie eine Funktion f einer Veränderlichen, deren Untersuchung das gestellte Optimierungsproblem lösen würde. Geben Sie einen Term und eine situationsgerechte Definitionsmenge der Funktion f an.

Abschließend folgt noch ein Beispiel zur **Einbeziehung von Randextrema**, das auf dem Leistungskursabitur 2006 beruht, aber im innermathematischen Anspruch deutlich reduziert wurde.

### Aufgabe 3.1.2 C

Aus rechteckigen Kunststoffplatten von 1 Meter Breite und 2 Meter Höhe wurden Stücke abgeschnitten, wobei die Schnittkurve Teil einer Parabel mit der Gleichung

$$y = 1,5x^2 + 0,5 \text{ ist.}$$

Aus der Restplatte werden Rechtecke – wie in der Skizze dargestellt – ausgeschnitten. Je eine Seite des Rechtecks soll auf dem unteren bzw. auf dem rechten Rand der Platte zu liegen kommen, eine Ecke des Rechtecks soll auf der Schnittkurve liegen.

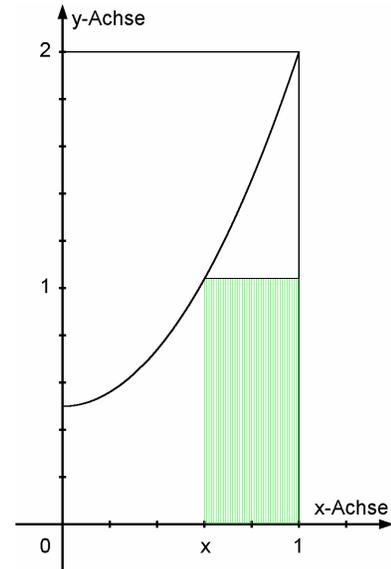
a) Zeigen Sie, dass für den Inhalt eines solchen Rechtecks

$$\text{gilt: } A(x) = 0,5(-3x^3 + 3x^2 - x + 1), \text{ wobei } 0 \leq x \leq 1.$$

b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Stelle  $x_w$  gibt, an der die 1. Ableitung von  $A$  gleich Null wird.

Begründen Sie weiter, dass  $A$  an der Stelle  $x_w$  nicht extremal wird.

c) Dennoch gibt es ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt. Welche Seitenlängen hat es?



### 3.1.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Der Stetigkeitsbegriff in formaler Form wird am achtjährigen Gymnasium nicht mehr behandelt. Die Schülerinnen und Schüler müssen jedoch eine anschauliche Vorstellung davon besitzen, wie der Graph in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle aussehen kann.

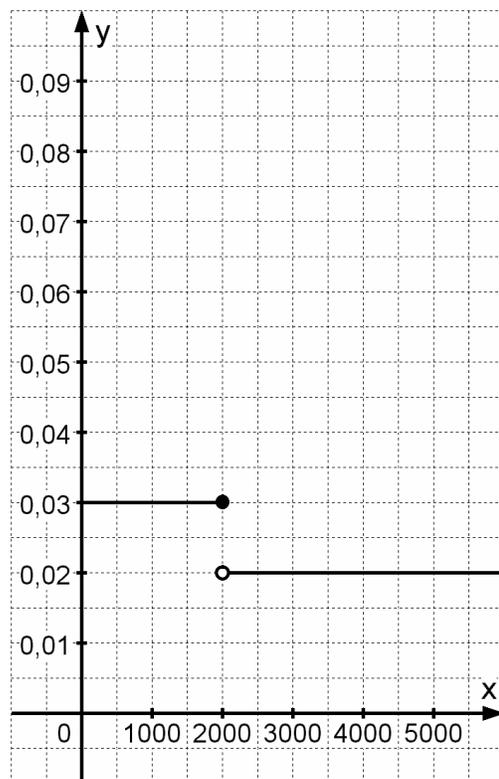
Zudem sollten die Jugendlichen in der Lage sein, in Anwendungssituationen mit unstetigen Funktionen umzugehen, solange die Unstetigkeit nicht zu einem innermathematischen Problem wird.

#### Aufgabe 3.1.3 A

Um Kunden anzulocken, bietet eine Bank ein Sparbuch an, bei dem die ersten 2000 Euro mit 3 % pro Jahr besonders gut verzinst werden. Die Funktion  $f$  gibt den Zinssatz an, der für den  $x$ -ten eingezahlten Euro pro Jahr gezahlt wird.

- a) Berechnen Sie, wie viel Zins jemand nach einem Jahr erhält, der das ganze Jahr über 3000 Euro auf dem Konto hatte.
- b) Zeichnen Sie die Integralfunktion  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$

für  $0 \leq x < 3500$  in das Diagramm ein (skalieren Sie dabei die  $y$ -Achse geeignet), und geben Sie an, welche Bedeutung die Funktionswerte von  $F$  im Sachzusammenhang haben.



Das Thema Differenzierbarkeit wird im Lehrplanabschnitt 11.1.2 behandelt. Dabei werden – wie in Kapitel 1.2 bereits erläutert – differenzierbare Funktionen von nicht-differenzierbaren abgegrenzt, ohne einen Schwerpunkt auf formale Verfahren zu legen. Die Schülerinnen und Schüler sollen wichtige Typen nicht-differenzierbarer Funktionen (Graphen mit „Knick“, mit senkrechter Tangente, mit Sprungstelle) und die Bedeutung des Differenzenquotienten kennen. Mögliche Fragestellungen zeigen die folgenden Aufgaben.

#### Aufgabe 3.1.3 B

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $D_f = \mathbb{R}_0^+$ , sowie mehrere Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems und einen weiteren Punkt des Graphen von  $f$  verlaufen.

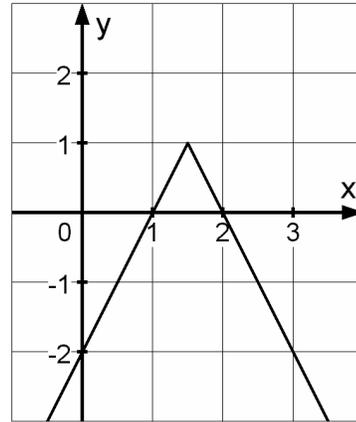
Machen Sie anhand Ihrer Zeichnung plausibel, dass sich die Steigung dieser Geraden darstellen lässt als  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ .

Untersuchen Sie das Verhalten dieses Quotienten für  $x \rightarrow 0$ . Deuten Sie diesen Grenzwert geometrisch.

## Aufgabe 3.1.3 C

Die Abbildung zeigt den Graph  $G_f$  einer Funktion  $f$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .

Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion  $f'$  in das abgebildete Koordinatensystem ein.



### 3.1.4 Änderungsrate

Die Deutung der Ableitung als Änderungsrate wurde im Lehrplankapitel 11.1.2 neu aufgenommen. Die nachfolgende Aufgabe bringt die bereits in Kapitel 1.2 vorgestellten Teilaufgaben in einem größeren Zusammenhang. Die Aufgabe enthält Elemente aus einer Abituraufgabe des Jahres 2006 in Baden-Württemberg.

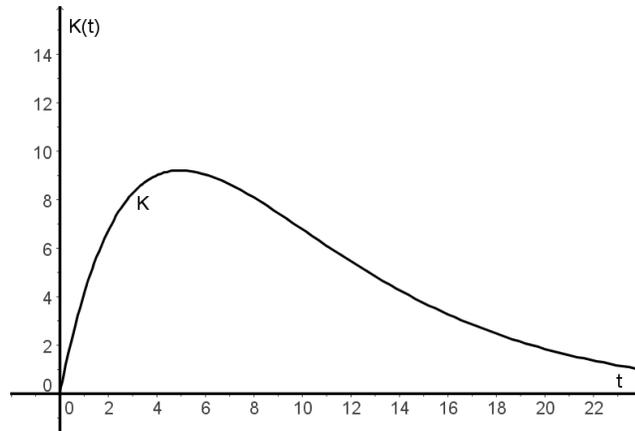
#### Aufgabe 3.1.4 A

Konzentration eines Medikaments im Blut

Die Funktion  $K$  mit  $K(t) = 5t \cdot e^{-0,2t}$  und  $t \geq 0$  beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

Dabei wird  $t$  in Stunden seit der Einnahme und  $K(t)$  in  $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$  gemessen.

Die Abbildung zeigt den Graph von  $K$ .



- Das Medikament ist wirksam, wenn die Konzentration im Blut mindestens  $4 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$  beträgt. Entnehmen Sie der Zeichnung den Zeitraum, in dem das Medikament wirksam ist.
- Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Konzentration ihren höchsten Wert erreicht hat, und bestimmen Sie das Maximum der Konzentration.
- Begründen Sie durch Rechnung, nach welcher Zeit das Medikament am stärksten abgebaut wird. Bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Konzentration.
- Ab dem Zeitpunkt  $t = 10$  werde die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an den Graphen von  $K$  beschrieben. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament gemäß dieser Näherung vollständig abgebaut ist.
- Nun wird wieder die ursprüngliche Beschreibung der Konzentration durch  $K$  verwendet. Zwölf Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentrationen im Blut des Patienten addieren. Geben Sie den Term einer Funktion  $G$  an, die die Konzentration des Medikaments nach erneuter Einnahme beschreibt.

Die nachfolgende Aufgabe verändert die Blickrichtung dahingehend, dass zunächst die Änderungsrate gegeben ist und im weiteren Verlauf dann Rückschlüsse auf die Funktion gezogen werden müssen.

Aufgabe 3.1.4 B

Die Änderungsrate  $a$  eines Pflanzenbestands wird für die nächsten 20 Jahre wie folgt modelliert:

$a(t) = 1,12 \cdot t(t - 8)(t - 20)$  wobei  $t$  die Zeit in Jahren angibt und  $a(t)$  in  $\frac{\text{Pflanzen}}{\text{Jahr}}$  gemessen wird.

- a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von  $a$ , die die Nullstellen von  $a$  und die Vorzeichen der Termwerte  $a(t)$  wiedergibt.
- b) Geben Sie an, in welchen Zeiträumen der Bestand zunimmt bzw. abnimmt. Begründen Sie, wann innerhalb der betrachteten 20 Jahre der Bestand maximal ist.
- c) Am Anfang waren 10000 Pflanzen vorhanden. Bestimmen Sie den Maximal- und Minimalbestand im betrachteten Zeitraum von 20 Jahren.

Um im Rahmen der Modellierung mit Mitteln der Differentialrechnung arbeiten zu können, müssen als Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  oder Intervalle aus  $\mathbb{R}$  verwendet werden, obwohl die Anzahl von Pflanzen nur ganzzahlig sein kann.

### 3.1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgaben zum Themengebiet „Unabhängigkeit von Ereignissen – Bedingte Wahrscheinlichkeit“ finden sich in zahlreichen Abituraufgaben vergangener Jahrgänge. Im Kontext von bedingten Wahrscheinlichkeiten wird am achtjährigen Gymnasium mit Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln gearbeitet. An eine explizite Verwendung der Formel von Bayes ist nicht gedacht.

Zudem gibt es eine Vielfalt von Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit, die direkt mit der Definition arbeiten bzw. ein Verständnis der Definition erfordern. Die folgenden Aufgaben zeigen hier einige Möglichkeiten auf.

#### Aufgabe 3.1.5 A

Bei einem Zufallsexperiment werden die Ereignisse E und F betrachtet, wobei  $P(E) > 0$  und  $P(F) > 0$ .

Welche der Zeichen „=“, „<“, „>“ können anstelle der drei Punkte stehen:  $P(E \cap F) \dots P_F(E)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 3.1.5 B

Ein Autobesitzer sucht wegen merkwürdiger Motorengeräusche seine Werkstatt auf. Dort hört sich ein Mechaniker die Geräusche an und stellt zunächst eine Vermutung auf „Motor defekt“ (D) oder „Motor nicht defekt“. Bei der anschließenden genaueren Untersuchung wird festgestellt, ob ein Motorschaden vorliegt (M) oder nicht.

Beschreiben Sie folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Worten, und geben Sie jeweils an, ob die bedingte Wahrscheinlichkeit bei einem fähigen Mechaniker groß oder klein sein sollte.

- i)  $P_M(D)$     ii)  $P_{\overline{M}}(D)$     iii)  $P_{\overline{D}}(\overline{M})$

#### Aufgabe 3.1.5 C

Ein Schafkopfspiel besteht aus 32 Karten, wovon jeder der vier Spieler acht Karten bekommt. Die höchsten Trümpfe sind die vier Ober. Gabi hebt ihre Karten nacheinander auf.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind ihre ersten beiden Karten Ober?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ihre zweite Karte ein Ober, wenn die erste Karte ein Ober war?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Herz-Ober unter ihren ersten beiden Karten, wenn ihre ersten beiden Karten Ober sind?

### 3.1.6 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

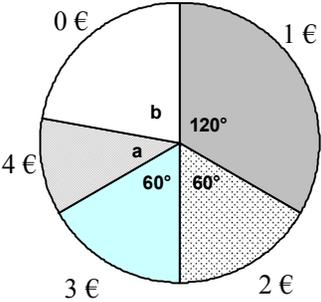
Das Lehrplankapitel zur Binomialverteilung erstreckt sich über den zentralen Punkt „Binomialverteilung“ hinaus auch auf die grundlegende Bedeutung von Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Geeignete Aufgaben aus dem bisherigen Leistungskursabitur können als Übungsmaterial herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, dass das Gebiet am achtjährigen Gymnasium im Vergleich zum bisherigen Leistungskurs in deutlich reduzierter Form behandelt wird. Beispielsweise sieht der Lehrplan Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz oder den Verschiebungssatz nicht vor.

Klassische Aufgaben wie die beiden folgenden sind aber weiterhin denkbar:

**Aufgabe 3.1.6 A**

In einem Glücksspiel mit einem Glückrad der abgebildeten Art soll bei einmaligem Drehen der Erwartungswert der Auszahlung 1,50 € betragen. Die Auszahlungsbeträge sind jeweils eingetragen.



a) Berechnen Sie, wie groß dazu die Mittelpunktswinkel der Sektoren gewählt werden müssen, die zu den Auszahlungen 0 € und 4 € gehören.

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Zufallsgröße Auszahlung.

**Aufgabe 3.1.6 B**

Ein Zeitschriftenladen bezieht pro Woche 3 Exemplare einer wenig verlangten Fahrradzeitschrift. Pro Exemplar bezahlt der Besitzer 1,30 € und verkauft es für 2,70 €. Unverkaufte Fahrradzeitschriften entsorgt er, sobald er die neuen Exemplare erhält. Aus Erfahrung weiß er:

Nachfragen pro Woche:	0	1	2	3	mehr als 3
Wahrscheinlichkeit:	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Lohnt sich der Verkauf der Fahrradzeitschrift auf lange Sicht?

Auf eine Stärkung der Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ zielen Aufgaben wie die folgenden ab:

**Aufgabe 3.1.6 C**

In der Klasse 10 C wurden eine Deutsch- und eine Mathematikschulaufgabe geschrieben. Die Zufallsgrößen D bzw. M ordnen einem zufällig ausgewählten Schüler seine Note in der Deutsch- bzw. Mathematikschulaufgabe zu.

Dabei ergaben sich folgende Beziehungen: Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt  $E(D) = E(M)$  und für die Varianzen gilt  $\text{Var}(D) < \text{Var}(M)$ .

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilung der Einzelnoten bedeuten.

## Aufgabe 3.1.6 D

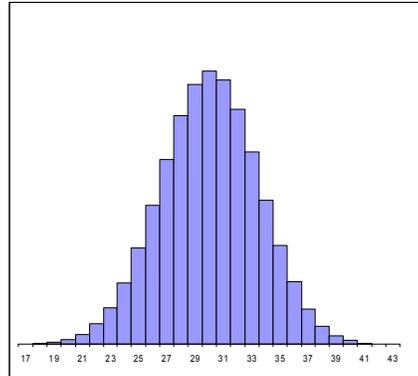
Die nebenstehende Graphik gibt das Histogramm einer nach  $B(n; p)$  verteilten Zufallsgröße wieder. Welche der drei angegebenen Verteilungen passt zu dem Histogramm?

Machen Sie Ihre Entscheidung plausibel.

i)  $B(40; 0,75)$

ii)  $B(60; \frac{2}{3})$

iii)  $B(50; 0,6)$



### 3.1.7 Lineare Abhängigkeit

Lineare Abhängigkeit wird gemäß Lehrplan nur noch konkret-anschaulich behandelt. Im Wesentlichen genügt ein Verständnis für die folgenden Sonderfälle:

- Zwei von  $\vec{0}$  verschiedene Vektoren sind linear abhängig, wenn jeder als linear Vielfaches des anderen dargestellt werden kann, d. h. wenn sie „parallel“ sind.
- Drei von  $\vec{0}$  verschiedene Vektoren sind linear abhängig, wenn zwei der drei Vektoren bereits untereinander linear abhängig sind oder sich einer und damit jeder der drei Vektoren als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt. Anschaulich bedeutet dies, dass sie alle „in einer Ebene liegen“.

#### Aufgabe 3.1.7

Gegeben sei die Menge  $M$  der Punkte  $X$  mit den Ortsvektoren  $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

- a) Der Wertebereich der Parameter wird zunächst auf  $\lambda, \mu \in [0; 2]$  beschränkt. Unter welchen Bedingungen für  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  entsteht eine Raute bzw. eine Strecke?
- b) Nun werde durch die obige Gleichung eine Ebene  $E$  dargestellt. Welche zwei Lagebeziehungen kann die Gerade  $g: \vec{X} = \vec{B} + \sigma(\vec{u} + \vec{v})$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ , zu dieser Ebene  $E$  einnehmen? Geben Sie auch ein Kriterium zur Unterscheidung der beiden Möglichkeiten an.

## 3.2 Anmerkungen und Beispiele zu ausgewählten Kompetenzen

Hinsichtlich der im Abitur auftretenden Aufgabentypen wird sich am achtjährigen Gymnasium die Tendenz der letzten Jahre fortsetzen. Wie bereits erläutert, ist hier nicht mit einer sprunghaften Veränderung zu rechnen. Die bereits seit Jahren propagierte neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabekultur erhielt durch die Diskussion zu den Bildungsstandards und die dort „eingeführten“ allgemeinen mathematischen Kompetenzen zusätzliche Impulse (vgl. Kapitel 1.3). Diese Entwicklung kann in ihrer Breite hier nicht vorgestellt werden; es werden aber nachfolgend zentrale Aspekte betrachtet und durch einzelne Aufgaben erläutert.

### 3.2.1 Modellieren

Es wird nicht der Versuch unternommen werden, die unterschiedlichen fachdidaktischen Sichtweisen der Kompetenz „Modellieren“ vorzustellen oder gegeneinander abzugrenzen. Die Definition der Bildungsstandards geht gemäß ihrer Interpretation in [2] davon aus, dass Modellieren in Sachzusammenhängen stattfindet, d. h. die durchaus verbreitete Idee einer „innermathematischen Modellierung“ wird in den Bildungsstandards nicht verfolgt. Der Definition nach [2] wird hier aus pragmatischen Gründen entsprochen.

Die folgenden Aufgaben sollen verdeutlichen, dass auch im Abitur versucht werden wird, Möglichkeiten zu einer vergleichsweise „**freien**“ **Modellierung** zu bieten. Derartige Aufgaben können in einer zentralen Prüfung nicht die Regel werden; vielmehr werden geführte Aufgaben in Anwendungszusammenhängen, wie sie in den letzten Jahren häufig zu beobachten waren, nach wie vor im Vordergrund stehen. Da eine freiere Modellierung aber zweifelsohne von praktischer Bedeutung ist und entsprechende Aufgabenstellungen Raum für wichtige und interessante Fragestellungen und Denkansätze bieten, sollen in sinnvollem Rahmen auch im Abitur Möglichkeiten für ihre Realisierung gefunden werden.

Die nachfolgende Darstellung einer Aufgabe in zwei Varianten zeigt die mögliche Bandbreite auf. Dabei ist Aufgabe 3.2.1 A sehr offen formuliert und erlaubt verschiedene Herangehensweisen, während 3.2.1 B trotz der gegebenen Freiheiten deutlich stärker führt.

#### Aufgabe 3.2.1 A

Die Abbildung zeigt die Europa-Passage in Hamburg, eine Ladenpassage, deren obere Stockwerke von 21 gleichen, markanten Bögen gestützt werden.

Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob die Bögen in der Abbildung parabelförmig sind.



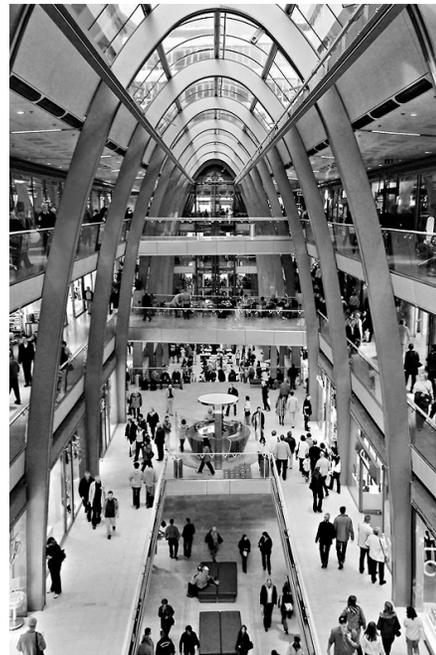
Quelle: Wikimedia Commons

#### Aufgabe 3.2.1 B

Die Abbildung zeigt die Europa-Passage in Hamburg, eine Ladenpassage, deren obere Stockwerke von 21 gleichen, markanten Bögen gestützt werden.

In dieser Aufgabe wird geprüft, inwieweit diese Bögen parabelförmig sind.

- Legen Sie im Foto ein geeignetes Koordinatensystem fest und ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel, die Spitze und Fußpunkte eines dieser Bögen enthält.
- Überprüfen Sie, ob die Bögen in der Abbildung tatsächlich parabelförmig sind.



Quelle: Wikimedia Commons

In der Stochastik stellt die Modellierung naturgemäß eine fast stets präsente Anforderung dar. Die nachfolgende Aufgabe bringt eine vergleichsweise offene Formulierung.

**Aufgabe 3.2.1 C**

Geheimdiplomats Ernst muss dringend eine Krisenregion verlassen. Dazu stehen zwei nicht besonders gut gewartete Flugzeuge zur Verfügung: Die zweimotorige „Alpha“ und die viermotorige „Beta“.

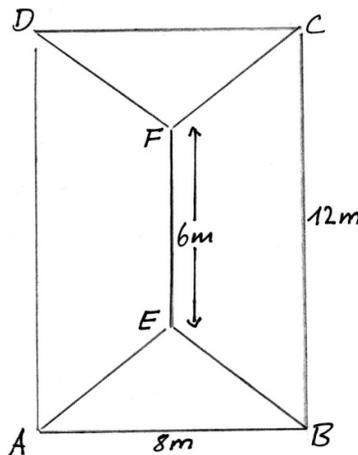
Alpha fliegt noch, wenn nur ein Motor läuft. Beta benötigt mindestens zwei Motoren, um sich in der Luft zu halten. Vereinfachend wird angenommen, dass jeder einzelne Motor mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausfällt, die der zuständige Mechaniker recht gut angeben kann.

Untersuchen Sie, bei welchen Angaben des Mechanikers sich Ernst für „Alpha“ entscheiden sollte.

Auch in der Geometrie bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern Entscheidungen hinsichtlich der Modellbildung selbst zu überlassen.

**Aufgabe 3.2.1 D**

Einem Zimmereibetrieb liegt für die Konstruktion eines Dachstuhls die nebenstehende Skizze samt handschriftlichem Kommentar der Bauherren vor. Für die Übernahme in ein Konstruktionsprogramm muss der Dachstuhl in einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschrieben werden.



*gegenüber liegende  
Dachflächen jeweils  
gleich geneigt!*

*First EF:  
3m Höhe über  
Dachboden!*

- a) Legen Sie selbst nach dieser Vorgabe ein geeignetes Koordinatensystem fest und geben Sie die Koordinaten der beiden Dachfirst-Endpunkte E und F in diesem Koordinatensystem an.
- b) Berechnen Sie den Neigungswinkel zwischen einer der trapezförmigen und einer der dreieckigen Dachflächen.

Teilaufgabe a erlaubt eine hohe Vielfalt an verschiedenen Lösungen (Wahl des Ursprungs; Lage und Skalierung der Achsen) und auch unterschiedliche Herangehensweisen in der Darstellung: Die Festlegung des Koordinatenursprungs sowie der Lage der Achsen einschließlich Festlegung der Einheit kann durch Anfertigen einer neuen Zeichnung mit Eintragung des Daches oder durch übersichtliches Ergänzen der vorgegebenen Skizze geschehen; alternativ ist auch eine verbale Beschreibung von Koordinatenursprung, Lage und Skalierung der Achsen denkbar.

Die Kompetenz Modellieren gemäß der Sichtweise der KMK-Bildungsstandards ist breit angelegt und deckt alle Anforderungsbereiche ab. Keineswegs ist also stets an ein „freies“ Modellieren wie in den obigen Aufgaben zu denken. Auch geführte Aufgaben wie die folgende stellen Anforderungen im Bereich des Modellierens. Zudem wird in Aufgabe 3.2.1 E der **Umgang mit graphischen Darstellungen** betont, der im Zusammenhang mit Anwendungssituationen einerseits von hoher Bedeutung ist, Schülerinnen und Schülern andererseits oft schwer fällt.

#### Aufgabe 3.2.1 E

Das ungebremste Wachstum von Bakterien lässt sich durch  $A(t) = A_0 \cdot e^{\lambda t}$  beschreiben, wobei  $t$  die Zeit,  $A(t)$  die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt  $t$  überdeckte Fläche und  $A_0$  die überdeckte Fläche zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist.  $\lambda$  ist eine für die jeweilige Bakterienart typische Konstante mit der Einheit  $\frac{1}{\text{Tag}}$ .

Für eine Bakterienkultur wird die folgende Messreihe aufgenommen:

t in Tagen	2	3	5	7	8
A in cm <sup>2</sup>	0,70	0,81	1,18	1,64	1,95

- a) Begründen Sie, dass sich gemäß dem Zusammenhang  $A(t) = A_0 \cdot e^{\lambda t}$  eine Gerade ergibt, wenn man in einem Koordinatensystem mit linearer Achsenskalierung  $\ln A$  gegen  $t$  aufträgt. Zeichnen Sie nun die Wertepaare  $(t \mid \ln A)$  aus der gegebenen Messreihe in ein derartiges Koordinatensystem und tragen Sie eine mögliche Näherungsgerade ein.
- Erläutern Sie, wie sich  $A_0$  und  $\lambda$  aus dem Diagramm ermitteln lassen und bestimmen Sie deren Werte. (zur Kontrolle:  $\lambda \approx 0,17 \frac{1}{\text{Tag}}$ )
- b) Weisen Sie nach, dass grundsätzlich für die Verdoppelungszeit  $T$  der Bakterienkultur  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$  gilt und berechnen Sie  $T$ .

Eine besondere Form der Modellierungskompetenz wird in Aufgaben angesprochen, die einen **authentischen Text** als Aufgabengrundlage haben. Derartigen Aufgaben sind oftmals zugleich geprägt durch vergleichsweise hohe Anforderungen im Bereich des Kommunizierens. Die Schülerinnen und Schüler müssen einen Text verstehen und analysieren, der bei seiner Entstehung nicht als Grundlage für eine Mathematikaufgabe gedacht war und demnach mit einer fachfremden Zielsetzung konzipiert wurde. Je nach konkreter Aufgabenstellung muss die beschriebene Situation gegebenenfalls geeignet vereinfacht und strukturiert werden, die vereinfachte Realsituation in die Mathematik „übersetzt“ und mithilfe geeigneter mathematischer Mittel gelöst werden.

Aufgabe 3.2.1 F bringt ein Beispiel, in dem keine großen Schwierigkeiten innermathematischer Art vorliegen sollten. Angesichts der Anforderungen im Bereich der Kompetenzen Modellieren und Kommunizieren wäre die Aufgabe bei einer Klassifizierung gemäß der KMK-Bildungsstandards gleichwohl im Anforderungsbereich II zu verankern.

**Aufgabe 3.2.1 F**

Die Abbildung zeigt den Gewinnplan des Gewinnspiels „Bayernlos“ mit zusätzlichen Hinweisen, die sich auf jedem Los finden. Im mathematischen Sinn handelt es sich bei diesem Gewinnplan um einen Auszahlungsplan; bei einer Auszahlung von z. B. 10 € und einem Lospreis von 1 € beträgt der Reingewinn des Spielers 9 €.

- a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen „Hauptgewinn“ (250 000 €) beim Bayernlos größer ist als die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ im Lotto „6 aus 49“. Kann man allein aus dieser Information ableiten, dass es besser ist, Bayernlose zu kaufen, als im Lotto zu spielen? Erläutern Sie Ihre Antwort.
- b) Erklären Sie, wie man aus den in den Abbildungen gegebenen Informationen den Erwartungswert der Zufallsgröße „Reingewinn für den Spieler“ beim Ziehen eines Bayernloses berechnen kann, wenn man davon ausgeht, dass alle Lose einer Auflage verkauft werden.
- c) Auf Plakaten an Losständen des Gewinnspiels „Bayernlos“ ist zu lesen, dass in jeder vollständig verkauften Auflage etwa 27 Millionen Euro an die Spieler ausgezahlt werden. Bestätigen Sie mithilfe dieser Information nachvollziehbar, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße Reingewinn  $-0,55$  € ist. Erklären Sie einem stochastischen Laien, was dieser Zahlenwert im Anwendungszusammenhang bedeutet.

GEWINNPLAN			WICHTIGE HINWEISE
<b>10</b>	x	<b>€ 250.000,-</b>	<p>Die Staatliche Bayerische Losbriefflotterie ist vom Bayerischen Staatsministerium der Finanzen genehmigt. Sie gelangt in einer Gesamtauflage von 60.000.000 Losbriefen à € 1,-, unterteilt in 10 gleiche Teilserien, zur Ausgabe. Die Losbriefe werden nur in Bayern über zugelassene Stellen verkauft.</p> <p>Jeder Losbrief enthält Serienbezeichnung, den Verfallstermin der Gewinne und den Entscheid, ob es sich um ein Gewinn- oder Nietenlos handelt oder ob das Los für die Ziehung der Kandidaten zum Fernsehgewinnspiel teilnahmeberechtigt ist.</p> <p>Die Auszahlung der Gewinne erfolgt nur bis zum Verfallstermin gegen Rückgabe der Originallose, deren Gewinnentscheid und Serienbezeichnung unversehrt sein müssen.</p> <p>Die Gewinne werden von den Vertriebsorganen der Staatlichen Lotterieverwaltung ausbezahlt. Gewinne ab € 2.500,- sind bei der Staatl. Lotterieverwaltung, Karolinenplatz 4, 80333 München (Postfach 201953, 80019 München), persönlich oder durch eingeschriebenen Brief geltend zu machen. Die Auszahlung kann mit befreiender Wirkung an jeden Inhaber oder Einsender des Original-Gewinnloses erfolgen. Eine Verpflichtung, die Berechtigung des Inhabers oder Einsenders zu prüfen, besteht nicht.</p>
<b>20</b>	x	<b>€ 50.000,-</b>	
<b>20</b>	x	<b>€ 10.000,-</b>	
<b>100</b>	x	<b>€ 5.000,-</b>	
<b>150</b>	x	<b>€ 1.000,-</b>	
<b>500</b>	x	<b>€ 500,-</b>	
<b>1.000</b>	x	<b>€ 100,-</b>	
<b>10.400</b>	x	<b>€ 50,-</b>	
<b>240.000</b>	x	<b>€ 10,-</b>	
<b>480.000</b>	x	<b>€ 5,-</b>	
<b>1.920.000</b>	x	<b>€ 2,-</b>	
<b>12.720.000</b>	x	<b>€ 1,-</b>	
<b>SOFORTIGER GEWINNENTSCHEID</b>			

Der negative Erwartungswert für den Reingewinn als Ergebnis in Teilaufgabe c bietet Gelegenheit, die Aufgabe im Sinne des Jugendschutzes inhaltlich zu diskutieren.

### 3.2.2 Kommunizieren und Argumentieren

Aufgabe 3.2.1 F leitet direkt zur Bedeutung des **Kommunizierens** über. Die Einforderung kommunikativer Kompetenz, insbesondere auch im Bereich des Argumentierens, zeichnet sich bereits in den Abituraufgaben der letzten Jahre deutlich ab und zieht sich demgemäß auch als Grundtendenz durch die vorliegende Handreichung. Die folgenden Ausführungen heben exemplarisch einige bedeutsame Aufgabentypen hervor.

Im Bereich des Kommunizierens war in den letzten Jahren im Abitur bereits mehrfach die **Beschreibung eines Lösungswegs** als Aufgabentyp zu beobachten. Dieser Aufgabentyp hat aufgrund der Anforderungen im Bereich des Kommunizierens bereits einen Wert an sich, ermöglicht aber zudem auch die Frage nach einem Plan oder einer Lösungsidee in Fällen, in denen eine rechnerische Lösung einen zu hohen formal-mathematischen Aufwand erfordern würde oder auch in Fällen mit verschiedenen Lösungswegen, die von der Idee her gleichwertig, vom rechnerischen Aufwand her aber sehr unterschiedlich wären.

In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass Schülerinnen und Schüler bei derartigen Aufgabenstellungen nicht überprüfen müssen, ob beispielsweise auftretende Gleichungen oder Integrale für sie lösbar bzw. berechenbar wären.

Aufgabe 3.2.2 A bringt ein Beispiel aus der Geometrie. Hinsichtlich des Erwartungshorizonts wird auf die Ausführungen im Kapitel 2.4 zu Aufgabe GI, 3 verwiesen. Insbesondere wird dort auch deutlich gemacht, wie sich die Erwartung hinsichtlich Umfang und Detailgrad der Schülerlösung verändern würde, wenn anstelle des Operators „Beschreiben Sie in mehreren Teilschritten einen Weg zur Ermittlung ...“ beispielsweise der Operator „Beschreiben Sie die zentrale Idee eines Verfahrens zur Ermittlung ...“ verwendet würde. Wie in einer Reihe von seit langem üblichen Aufgabenstellungen müssen die Schülerinnen und Schüler also auch hier im Unterricht ein Gefühl dafür entwickeln, wie detailliert eine Lösung in etwa erwartet wird. Dabei bleibt der Lehrkraft naturgemäß ein gewisser Spielraum.

#### Aufgabe 3.2.2 A

Gegeben seien eine Gerade  $g$  und ein Punkt  $B \notin g$  im Raum.

Beschreiben Sie in mehreren Teilschritten einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte  $R$  und  $S$  der Geraden  $g$ , die zusammen mit  $B$  ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Anforderungen im Bereich des Kommunizierens liegen nicht nur in einem (schriftlichen oder mündlichen) Darstellen und Präsentieren von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen, sondern genauso auch im **Verstehen von Texten** (oder mündlichen Äußerungen). Dieser Anforderung begegnet man naturgemäß nahezu in jeder Aufgabe. Gleichwohl gibt es Aufgabenstellungen, in denen diese Anforderung in den Vordergrund tritt, beispielsweise auch in Aufgabe 3.2.1 F aus dem vorigen Teilkapitel, in der ein authentischer Text als Aufgabengrundlage dient.

Die folgende Aufgabe 3.2.2 B stellt ein Beispiel dafür dar, dass Schülerinnen und Schüler dazu in der Lage sein sollten, sich in nicht vertrauten Situationen von einem Text führen zu lassen. In Kapitel 2.3, Aufgabe AII wurde im Zusammenhang mit der Planck'schen Strahlungsformel bereits auf diese Anforderungen hingewiesen.

Aufgabe 3.2.2 B behandelt die Symmetrie eines Graphen bezüglich eines Punktes, die in allgemeiner Form nicht Teil des Lehrplans am achtjährigen Gymnasium ist. Die Aufgabe ist demnach auch so gestellt, dass die Kenntnis einer allgemeinen Beziehung für die Punktsymmetrie eines Graphen selbstverständlich nicht notwendig ist und sogar wenig hilfreich wäre. Vielmehr sind die Fähigkeit und die Bereitschaft wichtig, der geführten Aufgabenstellung schrittweise zu folgen, und dabei die lehrplangemäß erworbenen Kenntnisse flexibel einzusetzen. Entsprechen-

de Aufgaben im Unterricht bereiten die Schülerinnen und Schüler auf derartige Anforderungen vor.

**Aufgabe 3.2.3 B**

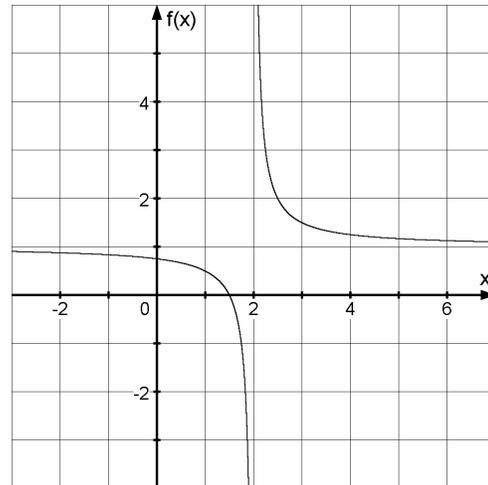
Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{2x - 3}{2x - 4} \text{ mit } D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Das Bild lässt vermuten, dass  $G_f$  symmetrisch zum Schnittpunkt seiner Asymptoten ist.

Zum Nachweis wird die Funktion  $g$  betrachtet, deren Graph  $G_g$  aus  $G_f$  durch eine Verschiebung um 2 Einheiten in Richtung der negativen  $x$ -Achse und um 1 Einheit in Richtung der negativen  $y$ -Achse hervorgeht.

Bestimmen Sie einen Term für  $g$  und weisen Sie mithilfe von Symmetriebetrachtungen für  $G_g$  nach, dass  $G_f$  symmetrisch zum Schnittpunkt seiner Asymptoten ist.



Für Aufgaben, die **Argumentationen** einfordern, gibt es vielfältige Beispiele sowohl innerhalb dieser Handreichung als auch in den Abituraufgaben der letzten Jahre. Die Bandbreite kann an dieser Stelle nur angedeutet werden. Exemplarisch werden einzelne wichtige Aspekte herausgegriffen.

Anhand vielfältiger Beispiele sollte den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht werden, dass je nach Aufgabenstellung **unterschiedliche Grade der mathematischen Exaktheit** erwartet werden: Bei „Begründen Sie“ ein höherer als bei „Machen Sie plausibel...“ oder „Veranschaulichen Sie ...“. Zur Verdeutlichung wird nachfolgend eine Formulierung aus Kapitel 2.3

wiederholt, die sich auf das Grenzwertverhalten der diskutierten Funktion  $h : x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$ ,  $D_h = \mathbb{R}$ , bezieht. Die Lösungshinweise in 2.4 zeigen auf, dass eine exakte mathematische Begründung nicht erwartet wird.

**Aufgabe 3.2.2 C – Ausschnitt aus Aufgabe 7 in AI, Kapitel 2.3**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel:

I.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

II.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

Grundsätzlich soll an dieser Stelle auf die Ausführungen zur **Bewertung** in [3] hingewiesen werden: Im Abschnitt 2.2.4 der Handreichung [3] wird dargestellt, dass sich die Art der Bewertung grundsätzlich an der Art der Anforderungen orientieren sollte: „Gerade bei Aufgaben mit problemlösendem oder begründendem Charakter ist es dabei auch vorstellbar, dass ein Schüler alle wesentlichen Aspekte erkennt und gut nachvollziehbar erläutert und damit trotz leichter Schwächen beispielsweise in der Formulierung volle Punktzahl erhält.“ ([3]; S. 97)

Die Schülerinnen und Schülern sind durch entsprechende Aufgaben in Unterricht, Hausaufgaben und Leistungserhebungen auf die Anforderungen im Bereich der Kompetenzen Kommunizieren

und Argumentieren vorzubereiten. Im Unterricht geführte Begründungen vermitteln insofern wichtige grundsätzliche Strategien – den Schülerinnen und Schülern ist aber bewusst zu machen, dass ein verständnisloses Auswendiglernen keine sinnvolle Prüfungsvorbereitung darstellt.

Im Verlauf des Unterrichts sollten insbesondere auch **grundsätzliche Beweistechniken** und ihre Grenzen behandelt werden, beispielsweise die Möglichkeit des Widerlegens einer Behauptung durch Angabe eines Gegenbeispiels wie in folgender Aufgabe.

Aufgabe 3.2.2 D

Im Verlauf einer Kurvendiskussion ergeben sich die Informationen  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) = 0$ .

Lässt sich daraus folgern, dass bei  $x_0$  kein Extrempunkt, sondern ein Terrassenpunkt vorliegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.2.2 E bringt ebenfalls eine Aufgabenstellung, in der Schülerinnen und Schüler selbst ein Beispiel finden sollen, allerdings kann ein solches eben nicht zum Beweis der untersuchten Aussage dienen, sondern nur zu einer Veranschaulichung. Derartige Unterscheidungen sollten den Jugendlichen bewusst sein. Gegebenenfalls kann auf der Basis eines solchen Beispiels dann weitergearbeitet und eine Beweisidee entwickelt werden.

Eine wichtige Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler ist es in solchen Aufgaben jedenfalls, Beispiele geschickt zu wählen, um beispielsweise den Rechenaufwand gering zu halten.

Aufgabe 3.2.2 E

Der Versuch, den Schnittpunkt einer Ebene mit einer echt parallelen Geraden zu bestimmen, führt auf ein unlösbares Gleichungssystem.

Illustrieren Sie diese Tatsache an einem selbst gewählten Beispiel.

## Anhang

Nachfolgend werden die Aufgaben des Beispielabiturs aus Kapitel 2.3 gemäß den allgemeinen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards (vgl. Kapitel 1.3) klassifiziert. Wie in 1.3 ausgeführt, stellt diese Klassifizierung keine verbindliche Einordnung dar, sondern nur EINE von mehreren Möglichkeiten, die sich im konkreten Fall einer Schülerbearbeitung an einzelnen Stellen als unzutreffend erweisen kann. Sie ist als Orientierungshilfe zu verstehen.

Wie in Kapitel 1.3 ausgeführt, ist es dabei normal, wenn eine Aufgabe Bezug zu mehreren Kompetenzen aufweist. Je nach Einschätzung der Bedeutung wird nachfolgend eine Zuordnung mit einem großen **X** bzw. kleinem **x** markiert.

<b>Aufgabe Analysis AI</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1. Nullstellen					<b>X</b>	
2. Definitionsbereich; Gleichung der Tangente		<b>x</b>			<b>X</b>	
3. Beispiel für Funktion mit vorgegebenen Eigenschaften		<b>X</b>				<b>x</b>
4. Stammfunktion $\ln(2x)$		<b>x</b>			<b>X</b>	
5. Zuordnung Graph - Funktionsterm	<b>x</b>	<b>x</b>		<b>X</b>	<b>x</b>	<b>x</b>
6a. Parabel zeichnen				<b>X</b>		
6b. Einbeschreibungsaufgabe		<b>X</b>		<b>x</b>	<b>x</b>	<b>x</b>
6c. Flächenberechnung				<b>x</b>	<b>X</b>	
7a. Monotonieverhalten, Grenzwerte, Funktionswerte, Graphen zeichnen				<b>X</b>	<b>X</b>	
7b. Zusammenhang zwischen Graphen				<b>x</b>		<b>X</b>
7c. Ableitung, Lage der Extremstellen	<b>X</b>				<b>X</b>	
7d. Grenzverhalten	<b>X</b>			<b>x</b>		
7e. Bestimmtes Integral				<b>x</b>	<b>X</b>	<b>x</b>
7f. Integralgrenze geeignet festlegen	<b>x</b>	<b>X</b>		<b>x</b>		

<b>Aufgabe Analysis AII</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1. Definitionsmengen, Nullstellen					<b>X</b>	
2. Tangentengleichung		<b>X</b>			<b>x</b>	
3a. Integration bei punktsymmetrischem Graphen	<b>X</b>					
3b. Integralberechnung an selbst gewähltem Beispiel		<b>x</b>			<b>x</b>	<b>X</b>
4. Näherungsterm für große x	<b>X</b>	<b>x</b>				
5a. Kurvendiskussion				<b>x</b>	<b>X</b>	
5b. Newtonverfahren					<b>X</b>	
5c. Flächenberechnung				<b>x</b>	<b>X</b>	
5d. Verlauf der Integralfunktion	<b>x</b>	<b>x</b>		<b>X</b>		<b>x</b>
6a. Vorzeichen der Planckschen Strahlungsfunktion	<b>X</b>		<b>x</b>		<b>x</b>	<b>X</b>
6b. Ableitung, Lage der Extremstelle					<b>X</b>	
6c. Zuordnung von Graphen zu Parameterwerten	<b>x</b>		<b>X</b>			<b>x</b>
6d. Abhängigkeit der Extremwerte vom Parameter	<b>x</b>		<b>X</b>			<b>x</b>

<b>Aufgabe Stochastik SI</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1a. Wert aus Diagramm ablesen				<b>X</b>		<b>x</b>
1b. Mittelwert zweier Diagrammwerte			<b>X</b>	<b>x</b>		
1c. Zusammenhang Absolutwerte-Prozentwerte			<b>x</b>	<b>x</b>		<b>X</b>
2. Pfadregeln			<b>X</b>	<b>x</b>	<b>x</b>	
3a. Bernoulli und Binomialverteilung					<b>X</b>	
3b. Signifikanztest	<b>x</b>		<b>X</b>		<b>x</b>	<b>x</b>
4a. Binomialverteilung (MC-Format)			<b>X</b>			
4b. Pfadregeln und Bernoulli-Kette		<b>X</b>	<b>x</b>			
4c. Ziehen ohne Zurücklegen		<b>X</b>	<b>x</b>		<b>x</b>	<b>x</b>

<b>Aufgabe Stochastik SII</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1a. Binomialverteilung (ohne Tabelle)	<b>x</b>		<b>X</b>		<b>x</b>	<b>x</b>
1b. Binomialverteilung	<b>x</b>		<b>X</b>			<b>x</b>
1c. Binomialverteilung			<b>X</b>			<b>x</b>
1d. Signifikanztest			<b>X</b>			<b>x</b>
2a. Baumdiagramm oder Vierfeldertafel			<b>x</b>	<b>X</b>		<b>x</b>
2b. Stochastische (Un-)Abhängigkeit	<b>X</b>			<b>x</b>		
2c. Stochastische (Un-)Abhängigkeit		<b>x</b>	<b>X</b>	<b>x</b>		<b>x</b>
3a. Bernoulli-Kette					<b>X</b>	
3b. Erwartungswert			<b>X</b>		<b>x</b>	
3c. Aussage zum Erwartungswert widerlegen	<b>X</b>	<b>x</b>				<b>x</b>

<b>Aufgabe Geometrie GI</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
1a. Flughöhe und Himmelsrichtung	x		X			x
1b. Steigungswinkel der Flugbahn			x		X	
1c. Punkt auf Gerade		x	X		x	
1d. Schnitt der Flugbahnen; Kollision	x		x		X	X
1e. Bedeutung von $\mu$ im Sachzusammenhang			X			x
1f. Überwachungsbereich des Radars		X	x	x	x	x
2. Abstand Punkt-Ebene					X	
3. Beschreibung „Vom Dreieck zum Drachenviereck“		x		x		X

<b>Aufgabe Geometrie GII</b>						
	Argumentieren	Problemlösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	formale und technische Elemente	Kommunizieren
	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a. Ebenengleichung; Zeichnen einer Schnittfigur				X	X	
b. Pyramidenvolumen		x		X	x	
c. Neigungswinkel berechnen und Beispiel für Ebene nennen				x	X	
d. Lagebeziehungen zwischen Ebenen	X					
e. Lage der Schnittfigur, Zeichnung, Flächeninhalt beim regulären Sechseck	x	x		X	x	x
f. Schnittfiguren Ebenenschar-Würfel		x		X		x

## Literaturverzeichnis

- [1] Barth u. a.: Mathematische Formeln und Definitionen. Lindauer Verlag, München 2004
- [2] Blum u. a.: Bildungsstandards Mathematik: konkret. Cornelsen Verlag, Berlin 2006
- [3] ISB: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur. Druckhaus Kastner, Wolnzach 2001
- [4] KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Luchterhand Verlag, 2004
- [5] KMK: Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Luchterhand Verlag, 2002