Grundkursabitur 2006	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Kosy sind die Punkte $A(3 \mid -2 \mid 3)$, $B(3 \mid 2 \mid 3)$, $C(6 \mid 2 \mid 7)$ und

$D(6 \mid -2 \mid 7)$ sowie die Gerade g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie die ***Normalenform*** der Ebene H, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird. Beschreiben Sie die Lage von H im Koordinatensystem.

   b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein ebenes Rechteck mit dem Flächeninhalt 20 ist.

   c) Berechnen Sie den ***Schnittpunk***t E der Geraden g mit der Ebene H.

   Zeigen Sie, dass E auf der Halbgeraden [AB, aber nicht auf der Strecke [AB] liegt.

   d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $F \in$ [BA so, dass das Viereck ECDF ein achsensymmetrisches Trapez ist.

   e) Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Trapezes und zeigen Sie, dass es den Flächeninhalt 40 hat.

---

2. Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der x_1x_3- Ebene ist die Spitze einer Pyramide mit dem Trapez ECDF als Grundfläche.

   a) Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

   b) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.

   Platzbedarf: eine ganze Seite; Ursprung in der Blattmitt

   c) Begründen Sie, dass die Pyramide bei der Spiegelung an einer geeigneten Ebene in sich abgebildet wird und geben Sie eine Gleichung dieser Symmetriebene in Normalenform an.

Grundkursabitur 2007	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A\left(8\,|\,2\,|\,0\right)$, $B\left(8\,|\,3\,|\,2\right)$, $C\left(8\,|\,-3\,|\,2\right)$ und $D\left(8\,|\,-2\,|\,0\right)$ sowie der Punkt $B'\left(0\,|\,3\,|\,2\right)$

gegeben.

1.a) Die Punkte A, B und B' spannen eine Ebene E auf.

Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

b) Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, und tragen Sie es in ein Koordinatensystem ein.

Welche Symmetrieeigenschaft und welche besondere Lage im Koordinatensystem hat das Trapez?

c) Der Punkt A' ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der x_2-Achse.

Berechnen Sie die Koordinaten von A'. Weisen Sie nach, dass das Dreieck DAA' rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D' so, dass das Viereck DAA'D' ein Rechteck ist.

d) Der Punkt C' entsteht durch Spiegelung des Punktes B' an der x_1x_3-Ebene.

Geben Sie die Koordinaten von C' an und zeichnen Sie das Prisma ABCDA'B'C'D' in die Zeichnung von Teilaufgabe 1.b) ein.

Abitur 2008	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $P\left(-8\,|\,-4\,|\,1\right)$ und

$Q\left(7\,|\,8\,|\,17\right)$ sowie die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie den Geradenpunkt R zum Parameterwert $\lambda = 30$ und zeigen Sie, dass Q nicht auf der Gerade g liegt.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die den Punkt Q und die Gerade g enthält in ***Normalenform***. Welche ***besondere Lage*** hat diese Ebene im Koordinatensystem ?

c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F\left(7 \mid -4 \mid 1\right)$ Fußpunkt des Lotes von Q auf die Gerade g ist. Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes Q von der Gerade .

$$\left[\text{Ergebnis}: d = 20\right]$$

d) Der Punkt Q' entsteht durch ***Spiegelung*** des Punktes Q an der Geraden g. Bestimmen Sie die Koordinaten von Q'.

e) Begründen Sie, dass das Viereck QPQ'R eine ***Raute*** ist, und ermitteln Sie deren Flächeninhalt. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, die die gegenseitige Lage der Geraden g und der Punkte Q, P, Q' und F veranschaulicht.

Wählen Sie hierfür die Ebene E als Zeichenebene.

f) Berechnen Sie alle ***Innenwinkel*** der Raute und den Abstand h paralleler Rautenseiten.

Grundkursabitur 2008	**Analytische Geometrie**	**Aufgabe VI**

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(1 \mid 2 \mid 0\right)$, $B\left(3 \mid 0 \mid 2\right)$ und $C\left(5 \mid 5 \mid 2\right)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest.

Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC ***gleichschenklig*** ist und berechnen Sie alle ***Innenwinkel*** des Dreiecks.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F\left(2 \mid 1 \mid 1\right)$ ***Mittelpunkt*** der Strecke $\left[AB\right]$ ist und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in ***Normalenform***, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene G.

d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreis in der Ebene G mit Durchmesser $\left[SC\right]$ liegt.

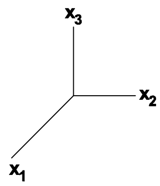
Grundkursabitur 2009	Analytische Geometrie	Aufgabe V

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A\left(-3\,|\,4\,|\,0\right)$ und $C\left(-2\,|\,1\,|\,2\right)$.

   a) Die Punkte 0, A und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

   b) Z sei der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Durch Spiegelung des Ursprungs 0 an Z entsteht der Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B.

   c) Berechnen Sie den Innenwinkel φ des Vierecks OABC bei O und begründen Sie, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

   Zeichnen Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem ein.

   (vgl. Skizze; Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende : $-1 \leq x_3 \leq 11$)

   d) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden $g = AB$ auf. Welche besondere Lage im Koordi natensystem hat g ?

   Das Lot vom Punkt C auf die Gerade g schneidet g im Punkt F.

   Berechnen Sie die Koordinaten von F. Zeichnen Sie das Lot in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe l.c) ein.

   e) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms OABC $5\sqrt{5}$ beträgt.

Grundkursabitur 2009	Analytische Geometrie	Aufgabe VI

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(2 \mid 0 \mid 1\right)$, $B\left(2 \mid -2 \mid 0{,}5\right)$ und $C\left(0 \mid -4 \mid 1\right)$ sowie die Ebene $x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ gegeben.

1. a) A, B und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform sowie in Normalenform.

   b) Bestätigen Sie, dass die Gerade s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade der Ebenen E und F ist, und begründen Sie, dass s in der x_1x_3-Koordinatenebene liegt.

   c) Zeigen Sie, dass die Punkte $R\left(4 \mid 0 \mid 0\right)$ und $S\left(0 \mid 0 \mid 2\right)$ auf der Geraden s liegen und dass die Punkte $T\left(0 \mid -8 \mid 0\right)$ beziehungsweise $U\left(0 \mid 4 \mid 0\right)$ die Schnittpunkte der Ebene E beziehungsweise der Ebene F mit der x_2-Achse sind.

   d) Zeichnen Sie die Punkte R, S, T und U sowie die Gerade s in ein Koordinatensystem ein und veranschaulichen Sie die Lage der Ebenen E und F durch Einzeichnen ihrer Spurgeraden.

---

2. In einem Geländemodell liegen die Hänge eines Bergrückens in den Ebenen E und F. Der Grat dieses Bergrückens wird von einem Teil der Geraden s gebildet. Die x_1-Achse zeigt in Südrichtung, die x_2-Achse in Ostrichtung.

   Vom Punkt B aus wird horizontal ein Tunnel in Ostrichtung durch den Berg bis zur Ebene F gebohrt.

   a) Berechnen Sie die Länge des Tunnels im Geländemodell.

   b) Vom Punkt $P\left(2 \mid p_2 \mid p_3\right)$ der Geraden TR soll in der Ebene E eine geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B angelegt werden.

   Berechnen Sie die Koordinaten von P und begründen Sie, dass diese Zufahrt zum Tunneleingang B bergauf und genau von Westen nach Osten verläuft.

   c) Berechnen Sie für diese Zufahrtsstraße von P nach B den Neigungswinkel α gegen die Horizontale. Beschreiben Sie mit kurzer Begründung, in welchem Punkt L der Strecke [TR] die steilstmögliche geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B beginnen würde.

   Hinweis: Die Koordinaten von L müssen nicht berechnet werden.

Grundkursabitur 2010	Analytische Geometrie	Aufgabe V

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(-3 \mid 2 \mid -1\right)$, $B\left(-1 \mid -1 \mid -3\right)$

und $S\left(3 \mid 7 \mid -11\right)$ sowie die Geraden $g = AB$ und $h\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h ***echt parallel*** zueinander sind. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Geraden g und h enthält, in ***Normalenform***.

   b) Bestimmen Sie die ***Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes*** vom Punkt S auf die Ebene E sowie den ***Abstand d*** des Punktes S von der Ebene E.

   c) Bestimmen Sie die Größe der ***Innenwinkel*** des Dreiecks ABS.

   Elementargeometrische Rechnung ist möglich, das das Dreieck bei B rechtwinklig ist.

   d) Berechnen Sie den Abstand $d\left(g; h\right)$ der Geraden g und h.

---

1. a) Parameterform von h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} + \sigma'\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \tau'\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$

Normalenvektor von H: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$

Normalenform von H: $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}\right] = 4x_1 - 3x_3 - 3 = 0$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ und damit ist ABCD ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Also ist ABCD ein Rechteck.

$\overline{AB} = 4$ und $\overline{AD} = 5$ ergibt $A_{ABCD} = 20$.

c) g in H: $4\cdot(5+\lambda) - 3\cdot(9+3\lambda) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$ und damit $E\left(3 \mid 6 \mid 3\right)$-

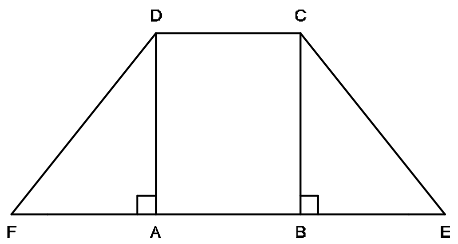
$AB: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$

Wegen $\lambda = 2 > 1$ liegt E auf der Halbgeraden [AB, aber nicht auf der Strecke [AB].

d) $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$

e) $\tan\varphi = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{FA}} = \dfrac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 51{,}3° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \approx 51{,}3° \quad \Rightarrow \quad \delta = \gamma \approx 128{,}7°$

$$A_{ECDF} = \frac{1}{2}\cdot(\overline{FE}+\overline{DC})\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot(12+4)\cdot 5 = 40$$



---

2. a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 1$ und damit $S\big(6\,|\,0\,|\,12\big)$.

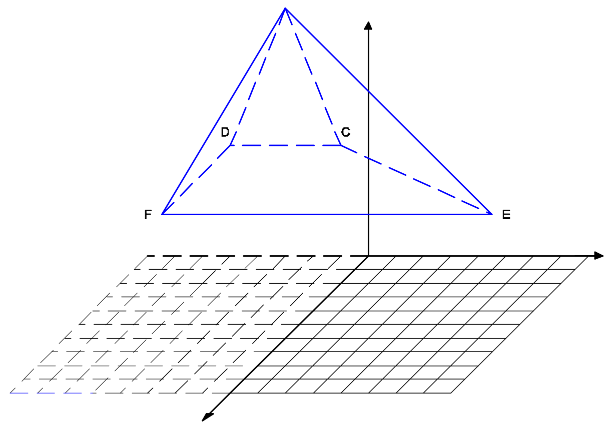
Lot von S auf H: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit H: $4\cdot(6+4\mu) - 3\cdot(12-3\mu) - 3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu = 0{,}6$

Ist P der Lotfußpunkt, dann ist

$$\overrightarrow{SP} = 0{,}6\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{SP} = 0{,}5\cdot 5 = 3 \quad\Rightarrow\quad V_{ECDF} = \frac{1}{3}\cdot 40\cdot 3 = 40$$

b)



c) FECD ist symmetrisch zur x_1x_3-Koordinatenenene und S liegt in dieser Ebene.

Gleichung: $x_2 = 0$

Grundkursabitur 2007	Aufgabe V	Lösung

1.a) Parametergleichung: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - x_3 - 4 = 0$

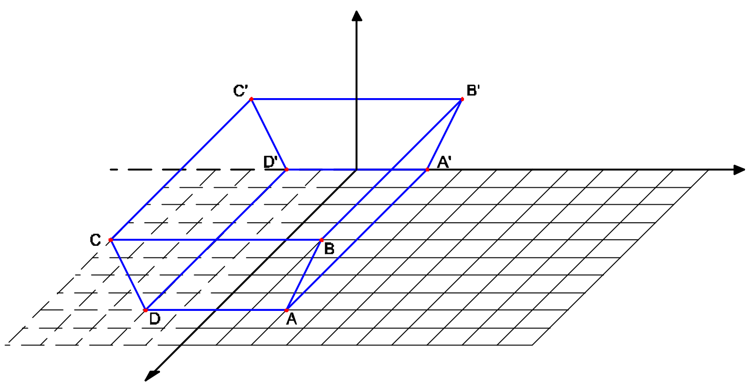
b) A und D bzw. B und C liegen symmetrisch zur x_1x_3-Koordinatenebene und damit ist das Viereck ABCD ein achsensymmetrisches Trapez.

c) $x_1 = x_3 = 0$ in E ergibt $x_2 = 2$ und damit $A'(0 \mid 2 \mid 0)$.

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle A'AD = 90°$.

$\vec{D'} = \vec{D} + \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $D'(0 \mid -2 \mid 0)$

d) Es ergibt sich $C'(0 \mid -3 \mid 2)$.



Abitur 2008	Aufgabe V	Lösung

1. a) $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 30 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $R\left(22 \mid -4 \mid 1\right)$.

Q in g : (1) $7 = -8+\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $8 = -4$ (f)

Q liegt also nicht auf der Geraden g.

b) Paramenterform von E: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform von E : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x_2 - 3x_3 + 19 = 0$

Die Ebene E ist parallel zur x_1-Achse des Koordinatensystems.

c) $\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{QF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

F in g : (1) $7 = -8+\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 15$ (2) $-4 = -4$ (w) (3) $1 = 1$ (w)

Also ist F Fußpunkt des Lotes von Q auf g.

$d(Q;\, g) = \overline{QF} = \sqrt{(-12)^2 + 16^2} = 20$

d) $\overrightarrow{Q'} = \overrightarrow{Q} + 2 \cdot \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 49 \end{pmatrix}$

e)

Es genügt zu zeigen, dass F der Mittelpunkt $\left[PR\right]$ ist.

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}-8\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}22\\-4\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$\overline{PQ} = 30$ ergibt $A_{QPQ'R} = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 40 = 600$

f) Es ist $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \gamma \approx 106° \quad \beta = \delta \approx 74°$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}15\\12\\16\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{PQ} = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{A_{QPQ'R}}{\overline{PQ}} = \frac{600}{24} = 24$$

Grundkursabitur 2008	Aufgabe VI	Lösung

1\. a) Seiten : $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{CA} = \sqrt{29}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{CB} = \sqrt{29}$

Winkel : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 23$ und damit $\cos\gamma = \frac{23}{29} \quad\Rightarrow\quad \gamma \approx 37{,}5° \quad\Rightarrow\quad \alpha = \beta \approx 71{,}2°$

b) $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{f}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$G : \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\overrightarrow{X}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

g in E : $(3-2\lambda)-\lambda+(2+2\lambda)-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3$

Eingesetzt ergibt sich $\vec{S} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt $\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.

Da G Symmetrieebene von $[AB]$ ist, steht ergibt sich $SF \perp E$.

Es ist $\measuredangle CFS = 90°$. Also liegt F auf dem Thaleskreis über $[CS]$:

Grundkursabitur 2009	**Aufgabe V**	**Lösung**

1. Gegeben : $O(0 \mid 0 \mid 0)$, $A(-3 \mid 4 \mid 0)$ und $C(-2 \mid 1 \mid 2)$

a) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und damit E : $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0$

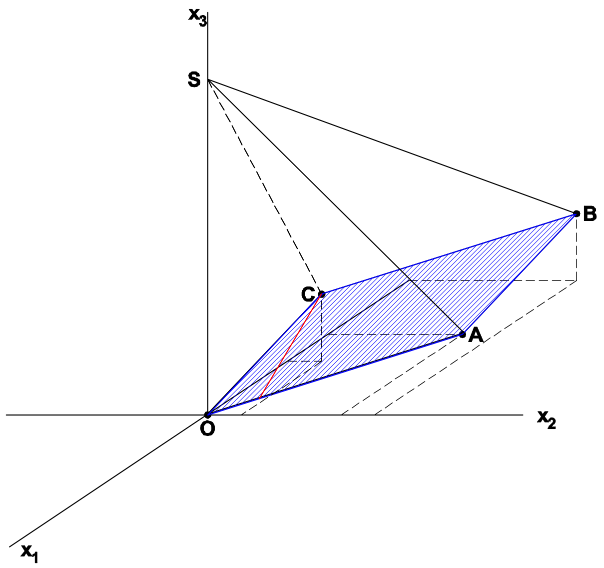
b) $\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{o} + \vec{b}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = 2 \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B(-5 \mid 5 \mid 2)$ ist also der gesuchte Punkt.

c) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ergibt $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}} = \frac{10}{5 \cdot 3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 48{,}2°$

Ferner ist $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und OABC mithin ein Parallelogramm.



d) Gerade OA . $\vec{x} = \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

OA verläuft in der x_1x_2-Ebene und geht durch den Ursprung.

Ansatz für die Lotebene L zu AB durch C : $-3x_1 + 4x_2 + n_4 = 0$

C eingesetzt : $-3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + n_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_4 = -10$

Schnitt mit L : $-3 \cdot (-3\delta) + 4 \cdot 4\delta - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0{,}4$

Ortsvektor des Lotfußpunkts : $\vec{f} = 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{CF} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$A_{OABD} = 5\sqrt{5}$

Grundkursabitur 2009	Aufgabe VI	Lösung

1.a) Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

b) $E + F$: $3x_1 + 6x_3 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_3 - 4 = 0$

Parametrisierung: $x_3 = \sigma$: $x_1 = 4 - 2\sigma$

Eingesetzt in E: $2 \cdot (4 - 2\sigma) - x_2 + 4\sigma - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Den Punkt R erhält man für $\sigma = 0$ und S für $\sigma = 2$.

$x_1 = x_3 = 0$ in E eingesetzt ergibt $-x_2 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -8$

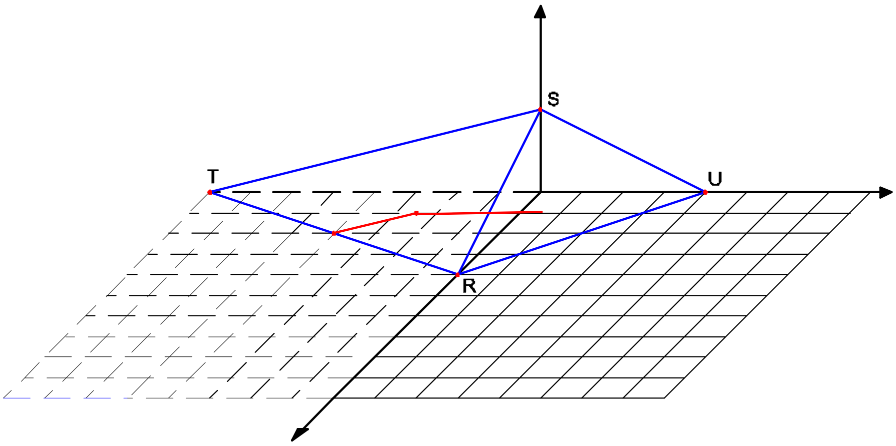
und damit ergibt sich $T(0 \mid -8 \mid 0)$.

$x_1 = x_3 = 0$ in F eingesetzt ergibt $x_2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 4$

und damit ergibt sich $U(0 \mid 4 \mid 0)$.

Jeder Punkt auf s hat die x_2-Koordinate 0 und liegt daher in der x_1x_3-Koordinatenebene.

d)



---

2. a) Tunnelgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt mit F ergibt des Tunnelausgang $B'\left(2 \mid 1 \mid 0{,}5\right)$

$\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{BB'} = 4$

b) Gerade TR: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Punkt P ergibt sich für $\rho = 2$ zu $P\left(2 \mid -4 \mid 0\right)$.

Tunnelauffahrt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Aus den Koordinaten des Richtungsvektors ergibt sich die Behauptung.

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 26{,}6°$

L ergibt sich als Fußpunkt des Lotes von B auf TR.

Grundkursabitur 2010	Aufgabe V	Lösung

1. a) g: $\vec{x} = \vec{A} + \mu\cdot\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren von g und h linear abhängig sind, sind die beiden Geraden parallel

Ebene E in Parameterform: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix} = 17\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 - 3 = 0$

b) Lotgerade: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \kappa\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

k die Ebene E eingesetzt: $3 + \kappa + 2\cdot(7 + 2\kappa) - 2\cdot(-11 - 2\kappa) - 3 = 0 \Rightarrow \kappa = -4$

$\kappa = -4$ in k eingesetzt ergibt $F = B\left(-1 \mid -1 \mid 3\right)$

$d\left(S; E\right) = \overline{SF} = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = 12$

c) $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$

$$\tan\alpha = \frac{12}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 71{,}0° \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 19{,}0°$$

d) Ebene durch A senkrecht zu g und g:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10 = 0$$

Schnitt mit h: $-2\cdot(7-2\lambda) + 3\cdot(4+3\lambda) + 2\cdot(6+2\lambda) - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9\lambda = 0$

Schnittpunkt ist also der Aufpunkt C d. h.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(g;\, h) = \overline{AC} = \sqrt{173} = 3\sqrt{17}$$
