1 Ableiten der Sinus- und Kosinusfunktion

===

2 Ableitungen

a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2x + \frac{1}{2}\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$

b) $f(x) = -9\cdot\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = -9\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

c) $f(x) = \sqrt{5}x\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \sqrt{5}\cdot\cos x - \sqrt{5}\cdot x\cdot\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{5}\cdot\frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{2} \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$

e) $f(x) = 6x^3\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 12x^2\cdot\cos x - 6x^3\cdot\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{4}\pi^3$

f) $f(x) = \sin x\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = -1$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^2\cdot(-\sin x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{2}{3}x\cdot(-\sin x) - \frac{1}{3}x^2\cdot\cos(x) \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{3}$

h) $f(x) = \frac{3}{4}\cdot\sin x + \frac{1}{8}x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{3}{4}\cdot\cos x + \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{8}$

----

3 Fehler beim Ableiten

Produktregel!

Vorzeichen bzw. Rechenzeichen

----

4 Steigung

a) $f'(x) = \cos x = 1 \quad\Rightarrow\quad x = k\cdot 2\pi \;\left(k \in \mathbb{R}\right)$

b) $f'(x) = \cos x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\left(k \in \mathbb{R}\right)$

c) $f'(x) = \cos x = -1 \quad\Rightarrow\quad x = (2k+1)\cdot\pi \;\left(k \in \mathbb{R}\right)$

d) $f'(x) = \cos x = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \;\vee\; x = \frac{5}{3}\pi + k\cdot 2\pi \;\left(k \in \mathbb{R}\right)$

----

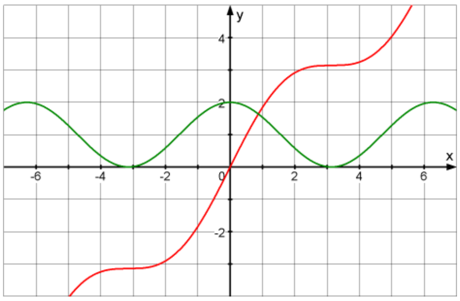
5 Mehrfache Ableitung

a) 4-mal

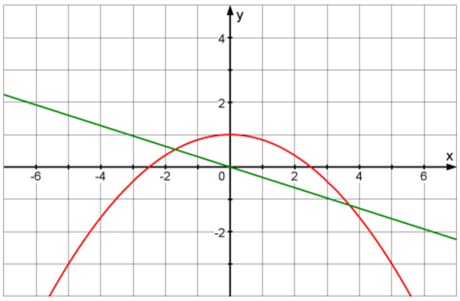
b) 4-mal

---

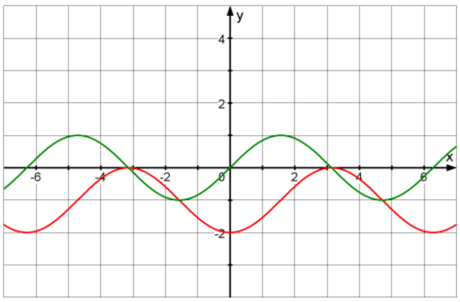
6 Graphen



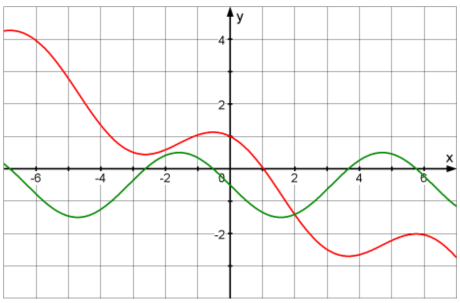
c'(x) = a(x)



g '(x) = k(x)



i '(x) = e(x)



h '(x) = f(x)

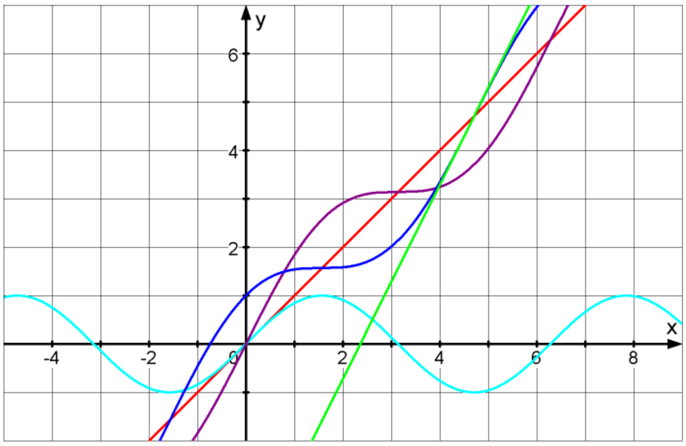
---

d '(x) = b(x)

---

7 Überlagerung von Graphen

a)



b) $g'(x) = 1 - \sin x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

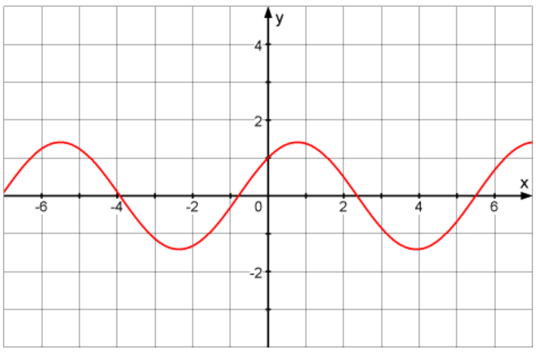
$$P_k\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid k \cdot 2\pi\right)$$

c) $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ und $g'(x) = 1 - \sin x \geq 0$

---

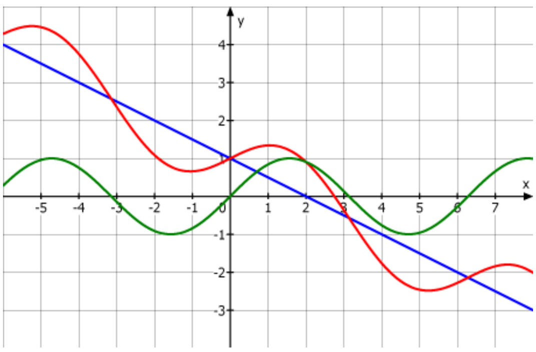
8 Überlagerung

a)



$f: x \to \sin x + \cos x$

b)



$f: x \to \sin x - \frac{1}{2}x + 1$

---

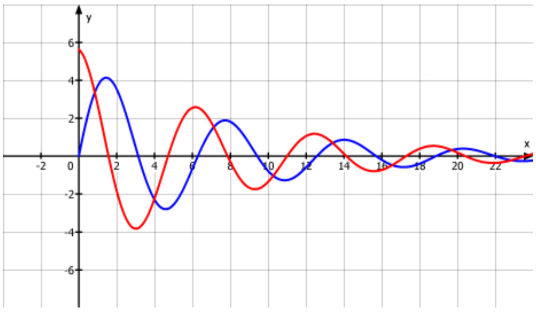
9 Schnittpunkt

$\sin x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}\pi \quad S\left(\frac{1}{4}\pi \,|\, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$(\sin x)' = \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

---

10 Gedämpfe Schwingung



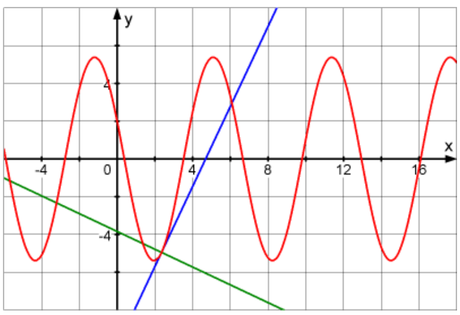
---

11 Tangente und Normale

	Ableitung	**Tangente**	**Normale**
a)	$f'(x) = \cos x$	$y = x$	$y = -x$
b)	$f'(x) = \cos x$	$y = \frac{1}{2}\cdot(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$y = -2\cdot(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c)	$f'(x) = 3\cdot\cos x$	$y = \frac{1}{2}\cdot(x - \frac{5}{3}\pi) - \frac{3}{2}\sqrt{3}$	$y = 2\cdot(x - \frac{5}{3}\pi) - \frac{3}{2}\sqrt{3}$
d)	$f'(x) = -\sin x$	$y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$y = \sqrt{2}\cdot(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
e)	$f'(x) = 1 + 2\cdot\cos x$	$y = (1+\sqrt{2})\cdot(x - \frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{4}\pi + \sqrt{2}$	$\lambda y = (1-\sqrt{2})\cdot(x - \frac{1}{4}\pi) + \frac{1}{4}\pi + \sqrt{2}$

f) $f'(x) = -2\cdot\sin x - 5\cdot\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Tangente: $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot(x - \frac{3}{4}\pi) - \frac{7}{2}\sqrt{2}$ Normale: $y = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\cdot(x - \frac{3}{4}\pi) - \frac{7}{2}\sqrt{2}$



---

g) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{6}\pi^3$

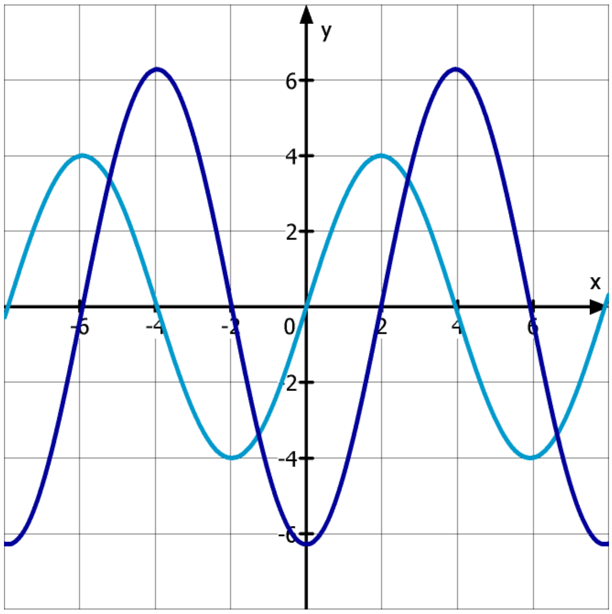
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos x - \frac{1}{6}x^3 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi) = -\frac{1}{2}\pi^2$

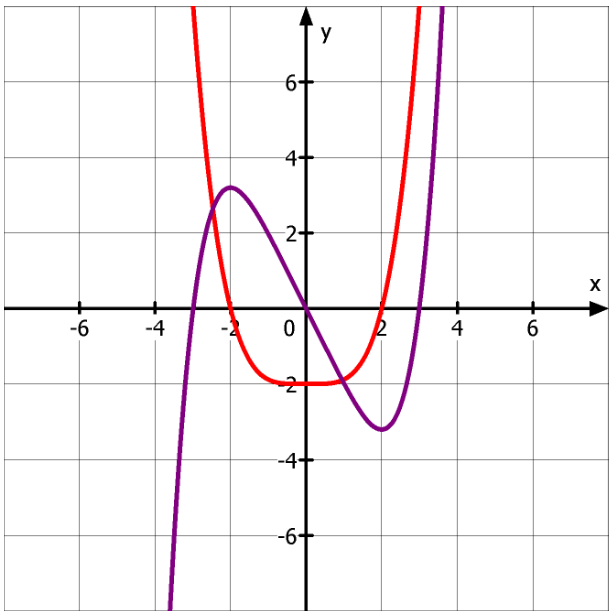
Tangente: $y = -\frac{1}{6}\pi^3 \cdot (x - \pi) - \frac{1}{2}\pi^2$

Normale: $y = \frac{6}{\pi^3} \cdot (x - \pi) - \frac{1}{2}\pi^2$

---

12 Stammfunktionen





13 Grenzwert

$f(0) = 0$

$f(x) = 1 - \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(0) - 0\ 0$

Sekantensteigung: $m_s = \dfrac{1 - \cos x \ - \ 0}{x - 0} = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0}(1 - \cos x) = 0$

---

14 Funktion und Ableitung

Funktion	**Ableitung**
q(x)	w(x)
m(x)	d(x)
t(x)	n(x)
a(x)	h(x)
c(x)	f(x)
g(x)	r(x)
s(x)	v(x)
b(x)	k(x)

---

15 Extrema

a) $f(x) = (\sin x)^2$

Nullstellen: $(\sin x)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

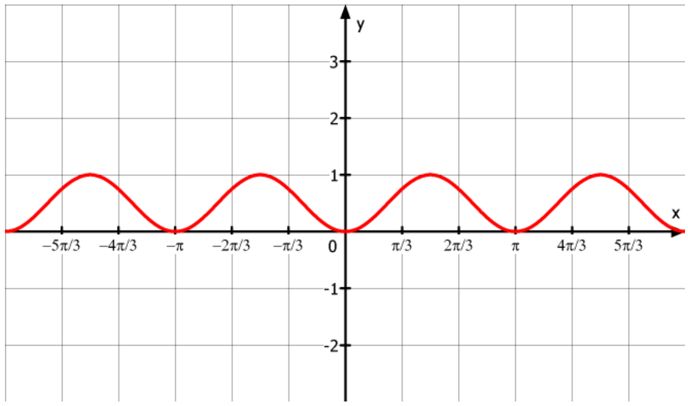
Symmetrie: $f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = (\sin x)^2 = f(x)$

Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Extrema: $f(x) = \sin x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \ \vee \ x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Die Punkte $\left(k \cdot \pi \mid 0\right)$ sind Tiefpunkte und die Punkte $\left(\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \mid 1\right)$ sind Hochpunkte des Graphen von f.

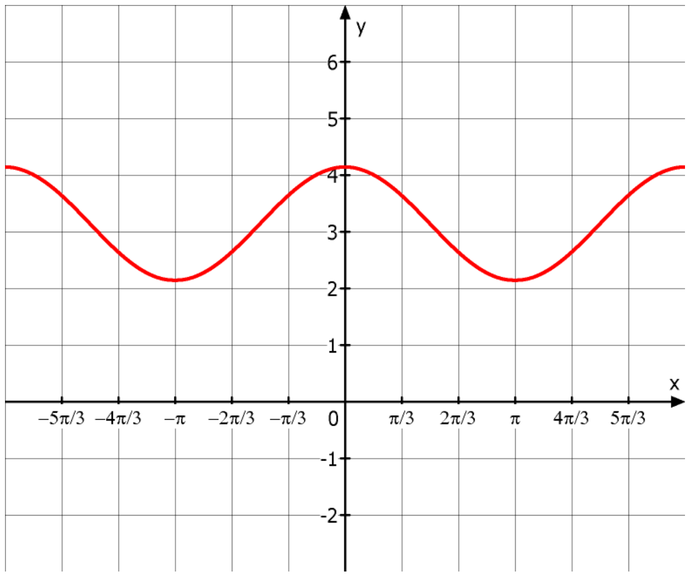


---

b) $f(x) = \cos x + \pi$

Die Funktion f besitzt keine Nullstellen und ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Der Graph besitzt die Hochpunkte $\left(k \cdot 2\pi \mid 1 + \pi\right)$ und die Tiefpunkte $\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid \pi - 1\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$



---

c) $f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

Der Graph besitzt also keine Schnittpunkte mit der x-Achse, ist achsensymmetrisch zur y-Achse und jeder seiner Punkte ist ein Extrempunkt.

---

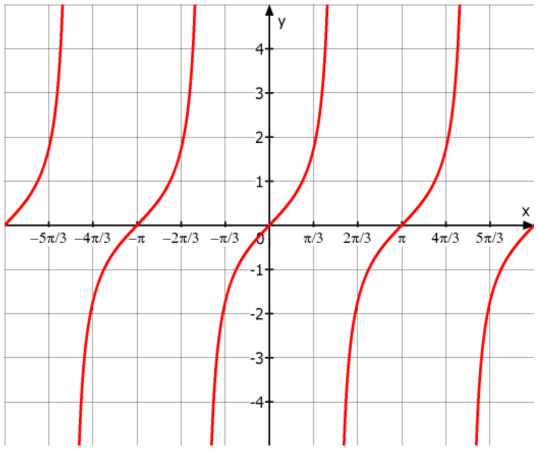
d) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Symmetrie: $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -f(x)$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

$f'(x) = \frac{-\cos x \cos x - \sin x \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x}$. Also besitzt der Graph von f keine Extrema.



---

16 Berührung

Stellen mit gleicher Steigung:

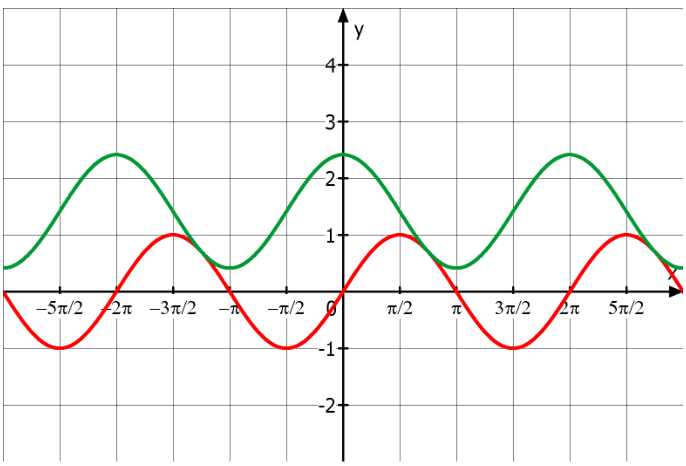
$$f'(x) = \cos x = g'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}\pi + k\cdot\pi$$

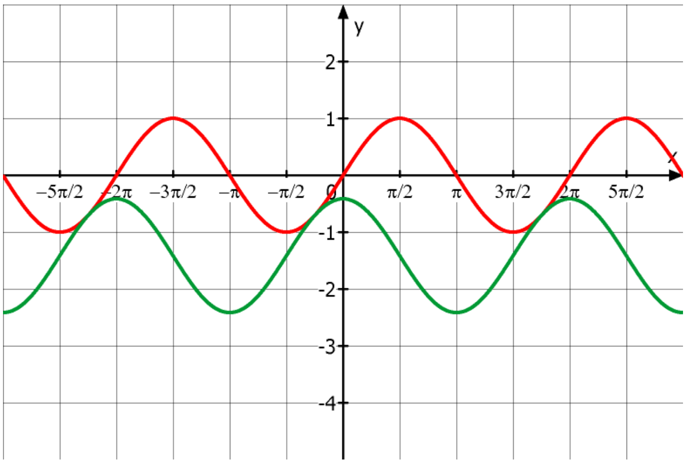
Gleiche Ordinaten:

$$\sin(-\frac{1}{4}\pi) = \cos(-\frac{1}{4}\pi) + c \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -\sqrt{2}$$

oder

$$\sin(\frac{3}{4}\pi) = \cos(\frac{3}{4}\pi) + c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{2}$$





G 17 Wurzeln

a) $\sqrt{8^3\cdot z}\cdot\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt{4^{-1}}\cdot\sqrt[3]{4z}\cdot\sqrt[6]{z} = 2^{\frac{9}{2}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}\cdot 2^{-1}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{1}{2}}\cdot z^{\frac{1}{6}} = 2^5\cdot z^{\frac{2}{3}}$

b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-5}\cdot\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{128x}\cdot\sqrt[12]{2^{-1}}\cdot\sqrt[4]{x} = 2^{-\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{7}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{12}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{2}}\cdot x^{\frac{3}{4}}$

---

18 Flächeninhalt

$\frac{1}{2}c\cdot(c+5) = \frac{1}{2}(c+2)\cdot(c+2) \quad\Leftrightarrow\quad 5c = 4c+4 \quad\Leftrightarrow\quad c = 4$

Es ist also $c = 4$ cm und $h_c = 9$ cm.
