6 Die Ableitung der Funktion $x \to x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

==

2 Ableitungen

a)	$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
b)	$f(x) = x^6$	$f'(x) = 6x^5$
c)	$f(x) = x^9$	$f'(x) = 9x^8$
d)	$f(x) = x^{-2}$	$f'(x) = -2x^3$
e)	$f(x) = x^{-5}$	$f'(x) = -5x^{-6}$
f)	$f(x) = x^{35}$	$f'(x) = 35x^{34}$
g)	$f(x) = \frac{1}{x^8} = -x^{-8}$	$f'(x) = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^{-100}} = x^{100}$	$f'(x) = 100x^{99}$

---

3 Ableitungen

a)	$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
b)	$f(x) = x^{2n}$	$f'(x) = 2n \cdot x^{n-1}$
c)	$f(x) = x^{2k+1}$	$f'(x) = (2k+1) \cdot x^{2k}$
d)	$f(x) = x^{3-m}$	$f'(x) = (3-m) \cdot x^{2-m}$
e)	$f(x) = x^{-n+5}$	$f(x) = (-n+5) \cdot x^{-n+4}$
f)	$f(x) = x^{1-3n}$	$f(x) = (1-3n) \cdot x^{-3n}$
g)	$f(x) = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$	$f(x) = -m \cdot x^{-m-1}$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^{-n-1}} = x^{n+1}$	$f(x) = (n+1) \cdot x^n$

---

4 Ableitbar ?

a) $f(x) = (x^2)^3 = x^6 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^5$

b) $g(x) = (x^{-3})^2 = x^{-6} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -6x^{-7}$

c) $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ mit bisherigen Regeln nicht ableitbar.

d) $k(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^9 = x^3 \quad \Rightarrow \quad k'(x) = 3x^2$

e) $r(t) = (t^{\sqrt{2}})^2 = t^{2\sqrt{2}}$ mit bisherigen Regeln nicht ableitbar.

f) $s(a) = a^{3,5}$ mit bisherigen Regeln nicht ableitbar.

g) $g(r) = \left(\dfrac{1}{r^{-4}}\right)^{2,5} = r^{10} \quad \Rightarrow \quad g'(r) = 10r^9$

h) $h(u) = \left(\dfrac{1}{u^{-5}}\right)^{0,1} = u^{0,5}$ mit bisherigen Regeln nicht ableitbar.

---

5 Zuordnung

$f \rightarrow h_3$ und $g \rightarrow h_2$

---

6 Tangenten

a) $f(x) = x^4$

Bedingung: $f'(x) = 4x^3 = m = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Tangente: $y = -4\cdot(x+1)+(-1)^4 = -4x-3$

b) $f(x) = x^3$

Bedingung: $f'(x) = 3x^3 = m = 12 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

Tangente: $y = 12\cdot(x-2)+2^3 = 12x-16$

c) $f(x) = x^{-1}$

Bedingung: $f'(x) = -x^{-2} = m = -\dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \vee x = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

Tangente:

$$y = -\frac{3}{4}\cdot(x-\frac{2}{3}\sqrt{3})+\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{4}x+\sqrt{3} \quad \text{bzw. } y = -\frac{3}{4}x-\sqrt{3}$$

d) $f(x) = x^{-2}$

Bedingung: $f'(x) = -2x^{-3} = m = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Tangente: $y = \frac{1}{4} \cdot (x+2) + (-2)^{-2} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$

Bedingung: $f'(x) = -6x^{-7} = m = 6 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

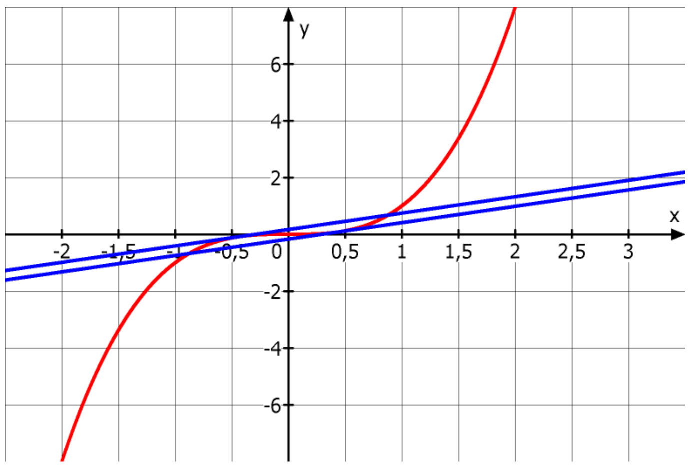
Tangente: $y = 6 \cdot (x+1) + (-1)^{-6} = 6x + 7$

f) $f(x) = x^{-5} \quad m = 0$ nicht möglich

---

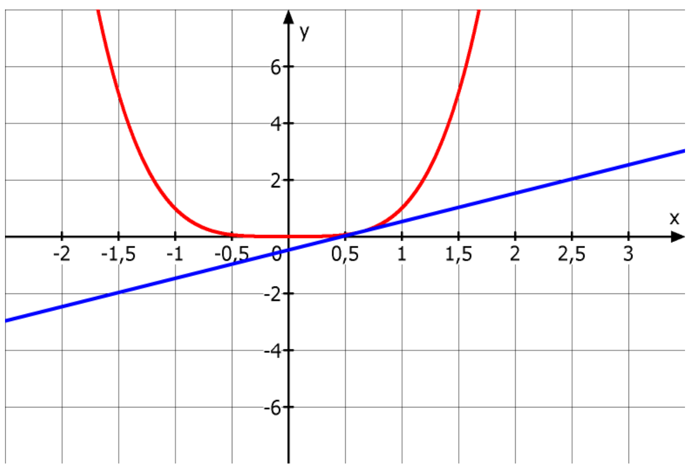
7 Gegebener Anstiegswinkel

a)



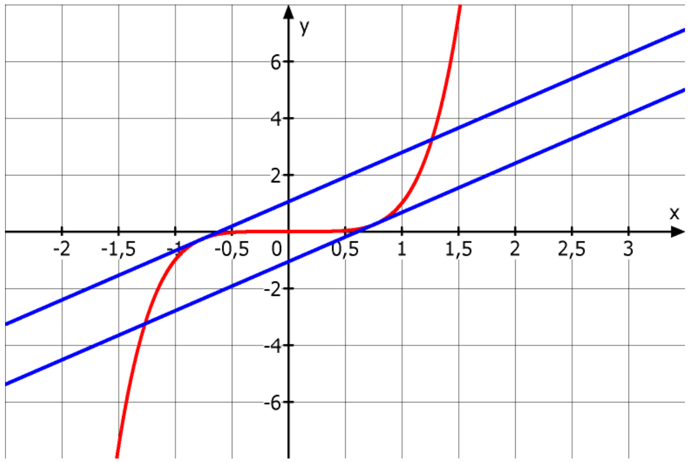
$f'(x) = 3x^2 = \tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}\sqrt[4]{3} \approx -0{,}44 \ \vee \ x = \frac{1}{3}\sqrt[4]{3} \approx 0{,}44$

b)



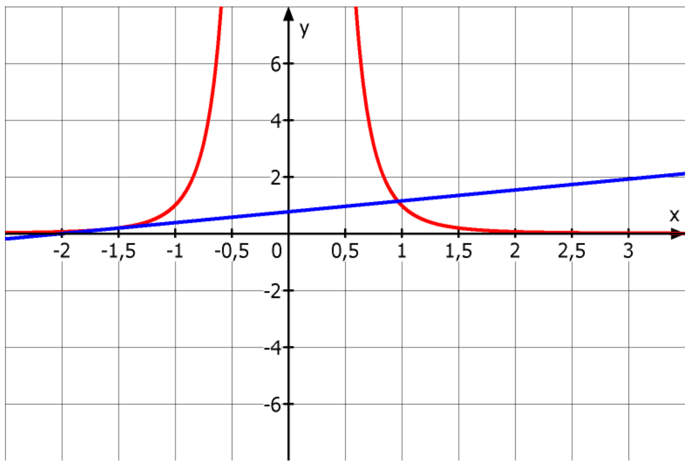
$$f'(x) = 4x^3 = \tan 45° = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$$

c)



$$f'(x) = 5x^4 = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[8]{\frac{3}{25}} \approx -0{,}77 \;\vee\; x = \sqrt[8]{\frac{3}{25}} \approx 0{,}77$$

d)



$$f(x) = -\frac{4}{x^5} = \tan 21° \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt[5]{\frac{4}{\tan 21°}} \approx -1{,}6$$

---

8 Beschleunigte Bewegung

a) $s(t) = t^2$

$$\left[0;\, 10\right]: \frac{10^2 - 0}{10} = 10$$

b) $s'(t) = 2t$

Bedingung: $s'(t) = 2t = 15 \quad \Rightarrow \quad t = 7{,}5$

---

9 Symmetrie der Ableitungsfunktion

a) $f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 \quad f'(-x) = 5\cdot(-x)^4 = 5x^4 = f'(x)$

b) $n = 2k+1 \quad f(x) = x^{2k+1}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = (2k+1)\cdot x^{2k} \quad \Rightarrow \quad f'(-x) = (2k+1)\cdot(-x)^{2k} = (2k+1)\cdot x^{2k} = f'(x)$

c) Die Ableitungsfunktion von $f: x \rightarrow x^n$ mit geradem n ist punktsymmetrisch.

$n = 2k \quad f(x) = x^{2k}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = k\cdot x^{2k-1} \Rightarrow \quad f'(-x) = 2k\cdot(-x)^{2k-1} = -2k\cdot x^{2k-} = -f'(x)$

---

10 Tangente mit weiterem Schnittpunkt

$h(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3x^2$

Allgemeine Tangentengleichung: $y = h'(x_0)\cdot(x-x_0)+h(x_0)$

a) Tangente in $B\left(1 \mid 1\right)$: $y = 3\cdot(x-1)+1 = 3x-2$

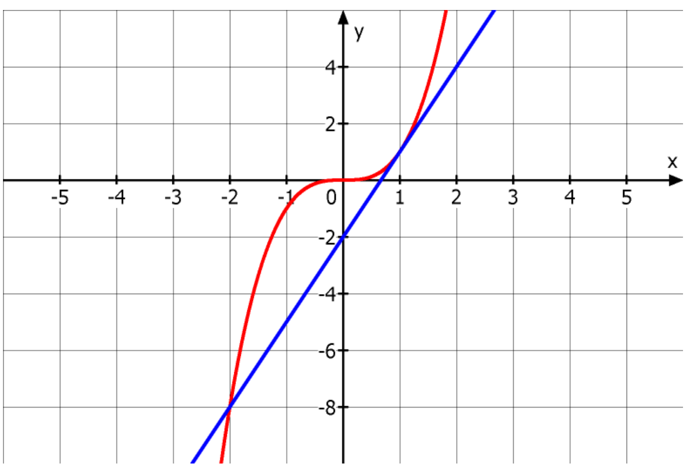
Schnittpunktsbedingung: $x^3 = 3x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-3x+2 = 0$

Eine Lösung ist $x = 1$. Also

$(x^3-3x+2):(x-1) = x^2+x-2$

$x^2+x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 1$

Also schneidet die Tangente im Punkt $B\left(1 \mid 1\right)$ den Graphen im $P\left(-2 \mid -8\right)$.



b) $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3$

---

11 Verwandte Ableitungen

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = -x^2$ und $g(x) = x^2$

c) $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = x^2$

d) $f(x) = x^2 + x$ und $g(x) = x^2$

G 12 Allgemeine Sinusfunktion

a) $f(x) = a \cdot \sin(bx)$

Amplitude : a Periode : $\frac{2\pi}{b}$ Phasenverschiebung : 0

b) $f(x) = \cos(bx + c)$

Amplitude : 1 Periode : $\frac{2\pi}{b}$ Phasenverschiebung : $-\frac{c}{b}$

G 13 Wurzeln

a) $\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{16}{225}} = \frac{4}{15}$ b) $\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{25}{576}} = \frac{5}{24}$
