**4 Ableitungsfunktion**

========================================================================

***2 Bestimmung von Ableitungen***

$$a)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2-2{x_0}^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cdot(x^2-{x_0}^2)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2\cdot(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 2\cdot(x+x_0) = 4x_0$$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = 4x$

------------------------------------------------------------------------

$$a)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-4x^2-(-4{x_0}^2)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-4x^2+{x_0}^2}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-4\cdot(x^2-{x_0}^2)}{x-x_0} == \lim_{x \to x_0} \frac{-4\cdot(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} -4\cdot(x+x_0) = -8x_0$$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = 4x$

------------------------------------------------------------------------

$$c)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_o+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2-2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_o+0} 0 = 0$$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = 0$

------------------------------------------------------------------------

$$d)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x-2 \quad 0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cdot(x-x_0)}{x-x_0} \lim_{x \to x_0} 2 = 2$$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = 2$

------------------------------------------------------------------------

$$e)\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{3-4x-(3-4x_0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-4x+4x_0}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-4\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = -4$$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = -4$

------------------------------------------------------------------------

f) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(\frac{1}{2}x^2 - 2x) - (\frac{1}{2}x_0{}^2 - 2x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0{}^2 - 2x + 2x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(x^2 - x_0{}^2) - 2\cdot(x - x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(x + x_0)\cdot(x - x_0) - 2\cdot(x - x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\left[\frac{1}{2}\cdot(x + x_0) - 2\right]\cdot(x - x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{1}{2}\cdot(x + x_0) - 2\right] = x_0 - 2$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = x - 2$

---

***3 Tangente mit vorgegebener Steigung***

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} = = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x + x_0)\cdot(x - x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$

Ableitungsfunktion : $f' : x \to f'(x) = 2x$

a) Für die x-Koordinate des Berührpunktes muss gelten:

$f'(x) = 2x = -5 \quad \Rightarrow \quad x = -2{,}5$

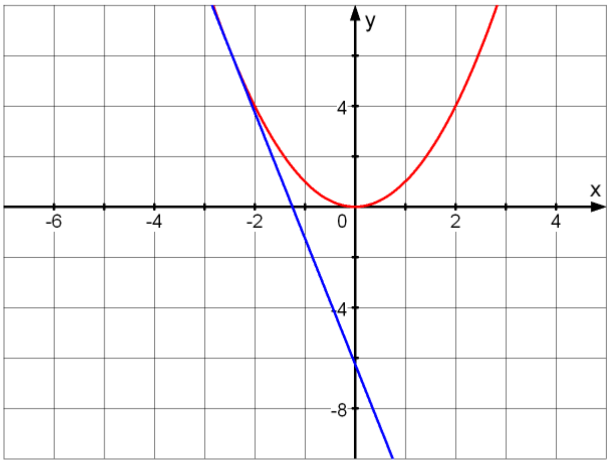
Durch Einsetzen in f(x) erhält man die y-Koordinate des Berührpunkts:

$y = (-2{,}5)^2 = 6{,}25$

Gleichung der Tangente: $y = -5\cdot(x + 2{,}5) + 6{,}25$

$y = -5\cdot(x + 2{,}5) + 6{,}25 = -5x - 6{,}25$

b)




Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $y = -5x - 6{,}25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1{,}25 = -\frac{5}{4}$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt zu $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{25}{4} = \frac{125}{32}$

---

***4 Quadratische Funktionen***

a) $f : x \to x^2 - 4$ und $g : x \to x^2 + 1$ bzw. $h : x \to x^2 + 4$

Mit dem üblichen Verfahren erhält man

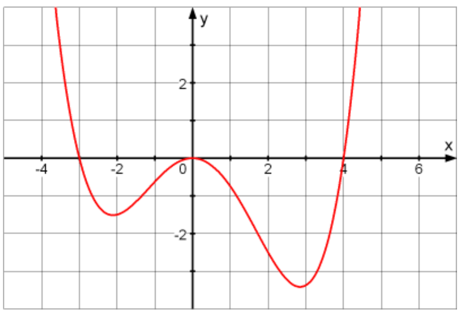
$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 2x$

b) Mit dem üblichen Verfahren erhält man

$f'(x) = 2x$

---

***5 Ganzrationale Funktion vierten Grades***




(1) falsch, denn f hat zwei einfache und eine doppelte Nullstelle und mehr als 4 Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades nicht besitzen.

(2) wahr, denn der Graph von f besitzt im Ursprung eine waagrechte Tangente d.h. $f'(0) = 0$.

(3) wahr, denn der Graph von f besitzt drei waagrechte Tangenten.

(4) wahr, wie man aus der Darstellung erkennt.

(5) falsch, denn für $-\infty < x < 0$ ist die Ableitung von f nicht positiv.

Das Bild zeigt den Graphen von f zusammen mit dem Graphen von f '.