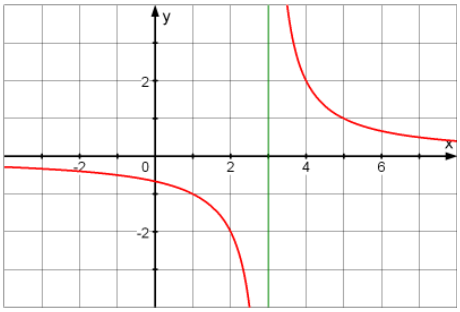
3 Funktionen

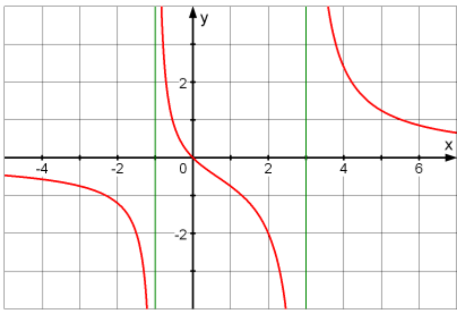
a) $f: x \to \dfrac{2}{x-3}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$



---

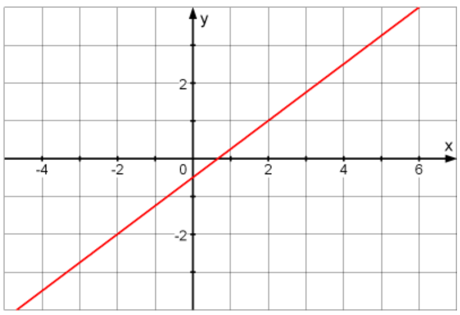
b) $f: x \to \dfrac{3x}{(x+1)\cdot(x-3)}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

$(x+1)\cdot(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 0 \vee x-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = 3$



---

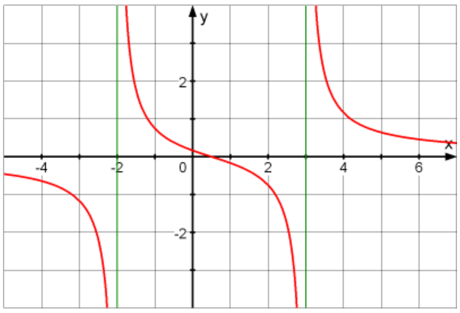
c) $f: x \to \dfrac{3x-4}{4}$ mit $D = \mathbb{R}$



---

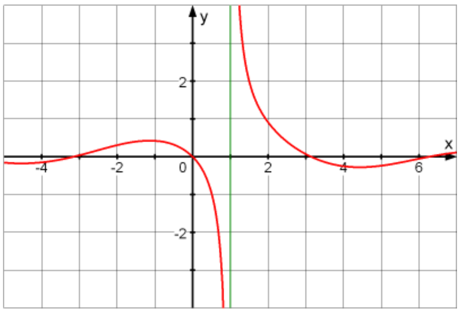
d) $f: x \to \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 3$



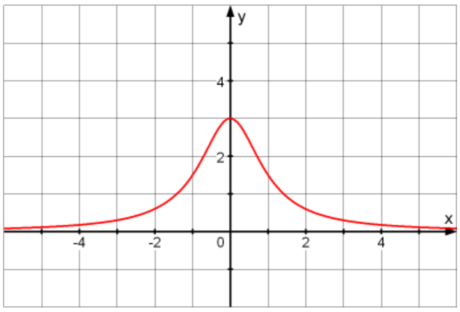
---

e) $f: x \to \dfrac{\sin x}{x-1}$ mit $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$



---

f) $f: x \to \dfrac{3}{x^2+1}$ mit $D = \mathbb{R}$



---

4 Polstellen

a)	$f(x) = \dfrac{2}{x^2-3}$	$-\sqrt{3}$ ungerade	$\sqrt{3}$ ungerade
b)	$f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4x+4}$	2 gerade	
c)	$f(x) = \dfrac{2}{(x-3)\cdot x}$	0 ungerade	3 ungerade
d)	$f(x) = \dfrac{-4}{3\cdot(x-0{,}5)^2}$	0,5 gerade	
e)	$f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$	keine Definitionslücke	

f)	$f(x) = \frac{3x-1}{(1+x)^2 \cdot x}$	-1 gerade	0 ungerade

Ausführlich:

a) $f(x) = \frac{2}{x^2-3}$

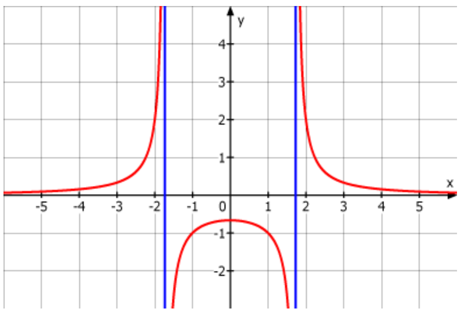
$x^2-3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$ und damit ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

Also $x^2-3 = (x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})$ und damit $f(x) = \frac{2}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$

$x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$ sind Pole ungerader (erster) Ordnung

d.h. es tritt an jedem Pol ein Vorzeichenwechsel, ein Unendlichkeitssprung auf.

Graph zur Veranschaulichung:

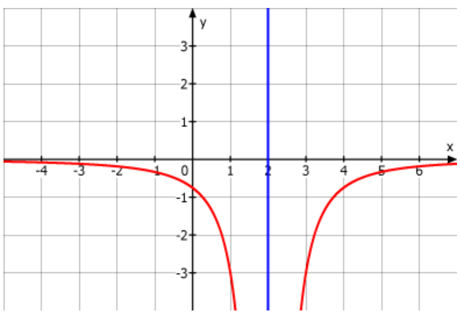


---

b) $f(x) = \frac{-3}{x^2-4x+4} = \frac{-3}{(x-2)^2}$ und damit ist $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$x = 2$ ist ein Pol gerader (doppelter) Ordnung d.h. es tritt kein Vorzeichenwechsel auf.

Graph zur Veranschaulichung:



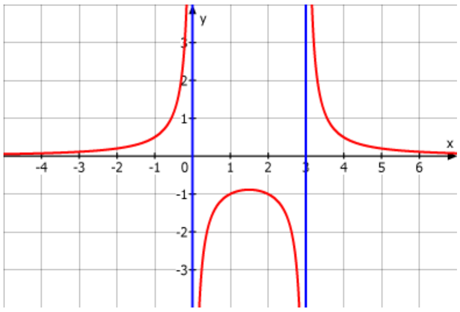
---

c) $f(x) = \frac{2}{(x-3)\cdot x}$

$(x-3)\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 0$ und damit $D = \mathbb{R}\backslash\{0; 3\}$.

$x = 3$ und $x = 0$ sind Pole ungerader (erster) Ordnung.

Graph zur Veranschaulichung:

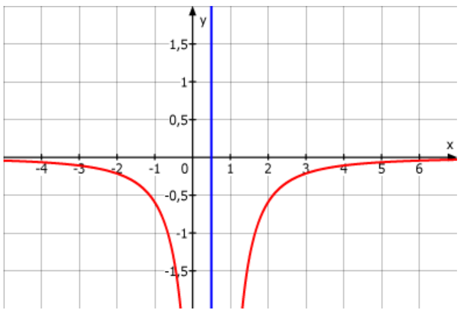


---

d) $f(x) = \frac{-4}{3\cdot(x-0{,}5)^2}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0{,}5\}$

$x = 0{,}5$ ist ein Pol gerader (doppelter) Ordnung d.h. es tritt kein Vorzeichenwechsel auf.

Graph zur Veranschaulichung:

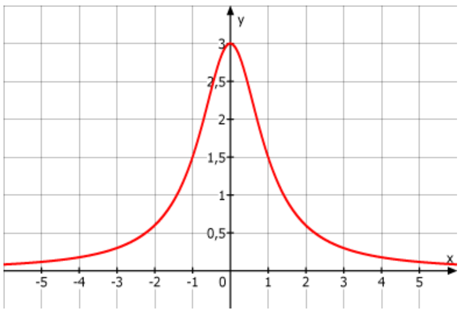


---

e) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ mit $D = \mathbb{R}$

Also hat f keine Definitionslücke und damit auch keinen Pol.

Graph zur Veranschaulichung:

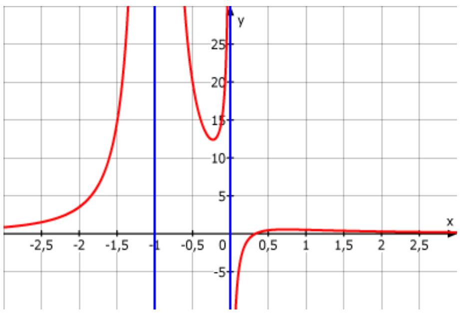


---

f) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(1+x)^2 \cdot x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$

$x = -1$ ist ein Pol gerader (doppelter Ordnung) und $x = 0$ ein Pol ungerade (einfacher) Ordnung.

Graph zur Veranschaulichung:



---

5 Verhalten an Definitionslücken und Nullstellen

a) $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ $\quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Nullstellen: keine

Vorzeichenbetrachtung:

	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$2-x$	$+$	$-$

Also $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{2}{2-x} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{2}{2-x} = \infty$

---

b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ $\quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Nullstelle: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

Vorzeichenbetrachtung:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < \infty$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

Also $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{2x-1}{(x+1)^2} = -\infty$

---

c) $f(t) = \frac{2t+2}{t^2-1} \quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Nullstelle : $2t+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$ liegt nicht im Definitionsbereich.

Umformung: $ft) = \frac{2t+2}{t^2-1} = \frac{2\cdot(t+1)}{(t+1)\cdot(t-1)} = \frac{2}{t-1}$

Vorzeichenbetrachtung:

	$-\infty < t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < \infty$
$t-1$	$-$	$-$	$+$

Also $\lim\limits_{t \to -1} \frac{2t+2}{t^2-1} = \lim\limits_{t \to -1} \frac{2}{t-1} = -1$

und $\lim\limits_{t \to 1+0} \frac{2t+2}{t^2-1} = \lim\limits_{t \to 1+0} \frac{2}{t-1} = \infty$ und $\lim\limits_{t \to 1-0} \frac{2t+2}{t^2-1} = \lim\limits_{t \to 1-0} \frac{2}{t-1} = -\infty$

---

d) $g(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+2} \quad D_{max} = \mathbb{R}$

Nullstellen : $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \lor x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mit der Mitternachtsformel

---

e) $f(z) = \frac{z^2+2}{z^2-2} \quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Nullstellen: keine

Vorzeichenbetrachtung:

	$-\infty < z < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < z < \sqrt{2}$	$\sqrt{2} < z < \infty$
z^2+2	+	+	+
z^2-2	+	−	+
f(z)	+	−	+

Also $\lim\limits_{z \to \sqrt{2}+0} \dfrac{z^2+2}{z^2-2} = \infty$ und $\lim\limits_{z \to \sqrt{2}-0} \dfrac{z^2+2}{z^2-2} = -\infty$

bzw.

$\lim\limits_{z \to -\sqrt{2}+0} \dfrac{z^2+2}{z^2-2} = -\infty$ und $\lim\limits_{z \to -\sqrt{2}-0} \dfrac{z^2+2}{z^2-2} = \infty$

---

f) $f(t) = \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3}$ $\quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$

Definitionslücken: $t^2-2t-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = t = -1 \vee t = 3$

Nullstellen: $2t-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{1}{2}$

Umformung: $f(t) = \dfrac{2t-1}{(t+1)\cdot(t-3)}$

	$-\infty < t < -1$	$-1 < t < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < t < 3$	$3 < t < \infty$
$2t-1$	−	−	+	+
$t+1$	−	+	+	+
$t-3$	−	−	−	+
f(t)	−	+	−	+

Also $\lim\limits_{t \to 3+0} \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3} = \infty$ und $\lim\limits_{t \to 3-0} \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3} = -\infty$

und $\lim\limits_{t \to -1+0} \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3} = \infty$ und $\lim\limits_{t \to -1-0} \dfrac{2t-1}{t^2-2t-3} = -\infty$

---

g) $g(x) = \dfrac{0{,}5+4x}{x^3-1}$ $\quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Nullstellen: $0{,}5+4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -0{,}125$

Vorzeichenverteilung:

	$-\infty < x < -0{,}125$	$-0{,}125 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$0{,}5 + 4x$	$-$	$+$	$+$
$x^3 - 1$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Also $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{0{,}5+4x}{x^3-1} = \infty$ und $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{0{,}5+4x}{x^3-1} = -\infty$

---

h) $f(z) = \dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{z-1}{z+1} \quad D_{max} = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$

Nullstellen: $z = 1$

	$-\infty < z < 1$	$1 < z < 2$	$2 < x < \infty$
$z-1$	$-$	$+$	$+$
$z+1$	$-$	$-$	$+$
$f(z)$	$+$	$-$	$+$

Also $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z-2)} = \lim\limits_{z \to 20} \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{1}{2}$

und $\lim\limits_{z \to -1+0} \dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z-2)} = \lim\limits_{z \to -1+0} \dfrac{z-1}{z+1} = -\infty$ sowie

$\lim\limits_{z \to -1-0} \dfrac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z-2)} = \lim\limits_{z \to -1-0} \dfrac{z-1}{z+1} = \infty$

---

6 Graphen

a) Ansatz: $f(x) = \dfrac{a}{x-1}$

Bedingung: $f(0) = \dfrac{a}{0-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

$f(x) = -\dfrac{1}{x-1}$ mit der Asymptote $x = 1$

---

b) Ansatz: $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2}$

Bedingung: $f(0) = \dfrac{a}{(0-2)^2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -2$

$$f(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} \text{ mit der Asymptote } x = 2$$

---

c) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ mit der Asymptote $x = 0{,}5$

---

d) $f(x) = \frac{3}{2x^2}$ mit der Asymptote $x = 0$

---

e) $f(x) = \frac{1}{2x+2}$ mit der Asymptote $x = -1$

---

7 Zusammenhang zwischen Funktionen : Verschiebung in Richtung der x-Achse

$f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

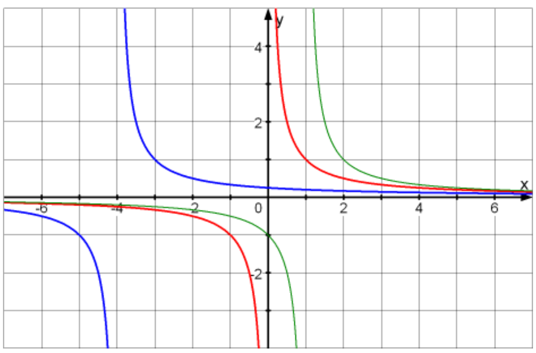
$h(x) = \frac{1}{x+4}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$

Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung mit dem Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Graph von h durch Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

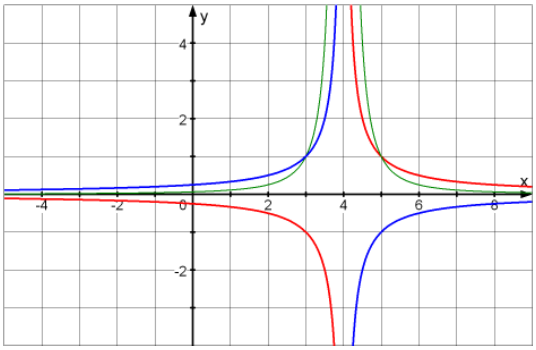
Also erhält man den Graphen von h aus dem Graphen von g durch Verschiebung mit dem

Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.



---

8 Graphen von Funktionen



a) $f: x \to \dfrac{1}{x-4}$

b) $f: x \to \left(\dfrac{1}{x-4}\right)^2$

c) $f: x \to \dfrac{1}{4-x} = -\dfrac{1}{x-4}$

d) $f: x \to \dfrac{1}{(4-x)^2} = \left(\dfrac{1}{x-4}\right)^2$

---

9 Funktionen mit vorgegebener Definitionsmenge

a) $D = \mathbb{R}\setminus\{-3\} \quad \to \quad f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2;\,2\} \quad \to \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

c) $D = \mathbb{R}\setminus\{-2;3\} \quad \to \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$

d) $D = \mathbb{R} \quad \to \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

---

10 Definitionsmenge, Verhalten an den Defintionslücken und Nullstellen

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4}$

Definitionsmenge: $x^2-5x+4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \;\vee\; x = 4 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}\setminus\{1;\,4\}$

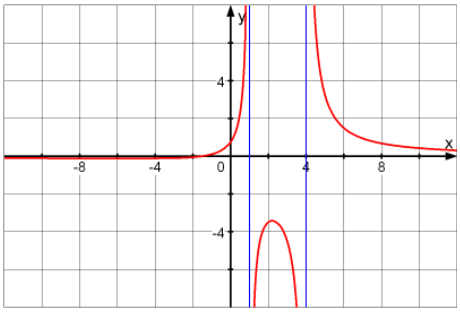
Nullstelle: $x = -1{,}5$

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < -1{,}5$	$-1{,}5 < x < 1$	$1 < x < 4$	$4 < x$
$2x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^2-5x+4	$+$	$+$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = \infty \text{ und } \lim_{x \to 1+0} \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = -\infty \text{ und } \lim_{x \to 4+0} \frac{2x+3}{x^2-5x+4} = \infty$$



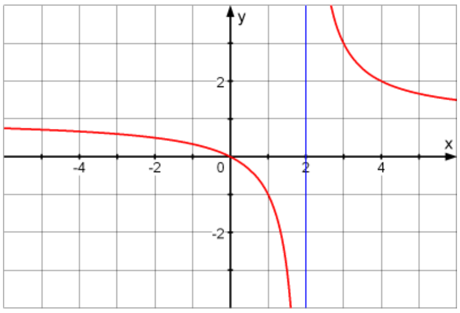
b) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{2x^2-8x+8} = \dfrac{2x\cdot(x-2)}{2\cdot(x-2)^2} = \dfrac{x}{x-2}$

$D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Nullstelle : $x = 0$

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
fx)	$+$	$-$	$+$

Also $\displaystyle\lim_{x \to 2-0} \frac{2x^2-4x}{2x^2-8x+8} = -\infty$ und $\displaystyle\lim_{x \to -2+0} \frac{2x^2-4x}{2x^2-8x+8} = \infty$



c) $f(x) = \dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)^2}$

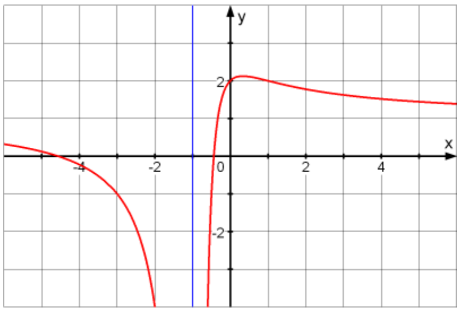
$D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Nullstellen : $x = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$

Vorzeichenuntersuchung:

	$-\infty < x < x_1$	$x_1 < x < -1$	$-1 < x < x_2$	$x_2 < x < \infty$
x^2+5x+2	+	−	−	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+
	+	−	−	+

Also $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)^2} = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x^2+5x+2}{(x+1)^2} = -\infty$



---

d) $\mathbf{f(x) = \dfrac{3x}{x^3-3x+2} = \dfrac{3x}{(x+2)\cdot(x-1)^2}}$

Definitionslücken: $x^3-3x+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x = -2 \vee x = 1$ (doppelt)

$D = \mathbb{R}\backslash\{1; -2\}$

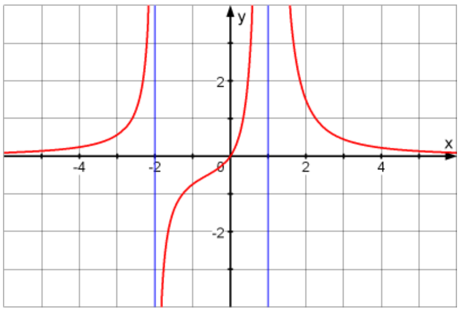
Nullstelle: $x = 0$

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$

$3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{3x}{x^3 - 3x + 2} = \infty \text{ und } \lim_{x \to -2+0} \frac{3x}{x^3 - 3x + 2} = -\infty$$

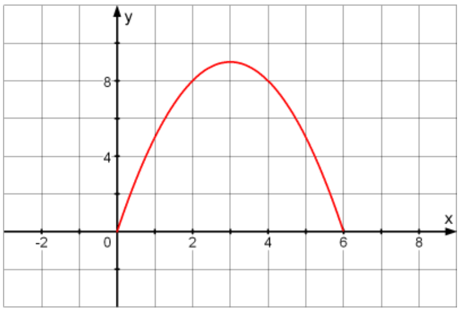
$$\lim_{x \to 1-0} \frac{3x}{x^3 - 3x + 2} = \infty \text{ und } \lim_{x \to 1+0} \frac{3x}{x^3 - 3x + 2} = \infty$$



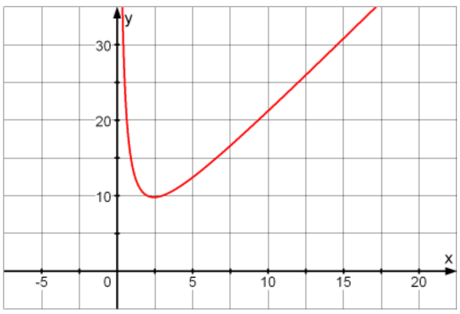
---

11 Rechtecke

a) $A(x) = x \cdot \frac{U - 2x}{2}$ mit $0 < x < \frac{U}{2}$



b) $U(x) = 2x + \frac{2A}{x}$ mit $0 < x < \infty$



---

12 Vorgegebene Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

a) $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x \cdot (x-1)^2}$ e) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ f) $f(x) = \frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)^2}$

---

13 Funktionenschar

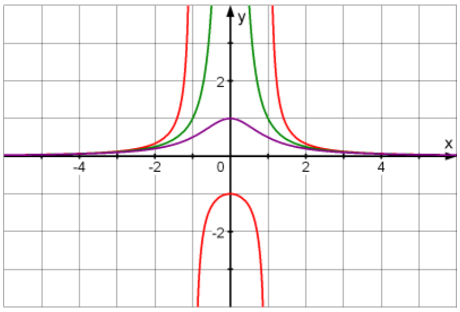
$f_t(x) = \frac{1}{x^2+t}$

a) $t > 0 \quad \Rightarrow \quad D_{max} = \mathbb{R}$

$t = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$t < 0 \quad \Rightarrow \quad D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{t}\,;\sqrt{t}\}$

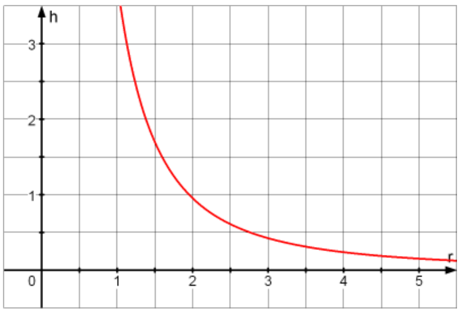
b)



---

14 Zylinder

a) $h(r) = \frac{V}{\pi r^2}$



h) Die Höhe beträgt ein Viertel der alten Höhe.

G 15 Polynomdivision

a) $(x-2)\cdot(x+5) = x^2+5x-2x-10 = x^2+3x-10$

b) $(x^2-x-1)\cdot(x-1) = x^3-x^2-x^2+x-x+1 = x^3-2x^2+1$

sowie

a) $(x^2+3x-10) : (x+5) = x-2$

b) $(2x^2+10x+8) : (x+1) = 2x+8$

c) $(x^2+2x-3) : (x-1) = x+3)$

G 16 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$0{,}32 = 0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot p \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}2$

a) $P(A \cap B) = 0{,}3\cdot 0{,}6 = 0{,}18$

b) $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$

c) $P(A \cup B) = 1-0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}44$

d) $P_B(A) = \dfrac{0{,}3\cdot 0{,}6}{0{,}32} = \dfrac{9}{16}$

G 17 Trapez

Eine Grundseite muss dreimal so lang wie die andere sein.
