Stammfunktionen

Achtung: Aufgabe 4 zur Flächenberechnung und Aufgabe 1 ur Integralfunktionen geändert!

1. Bestimme eine Stamfunktion

a) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ c) $f(x) = (e^{2x} - e^{-x})^2$

2. Bestimme eine Stammfunktion

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$ c) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ d)) $\int \frac{2x-1}{4x^2-1} dx$

3. Bestimme eine Stammfunktion

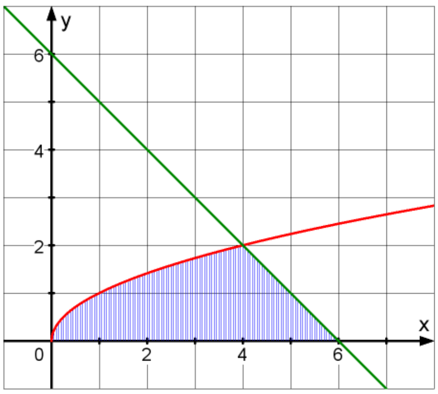
a) $f(x) = e^{1-2x}$ b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$

Flächenberechnung

1. Bestimme a so, dass der Graph von $f: x \rightarrow a \cdot x^2 - 4$ mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $10\frac{2}{3}$ FE einschließt.

2. Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche zwischen der x-Achse und den Graphen der Funktionen

$f: x \rightarrow \sqrt{x}$ und $g: x \rightarrow 6 - x$

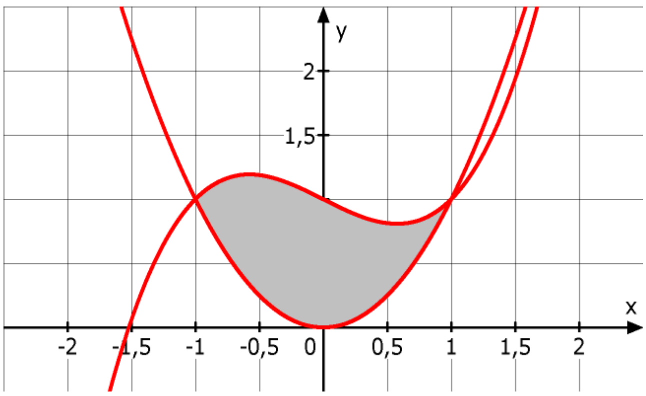


3. Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1$

und

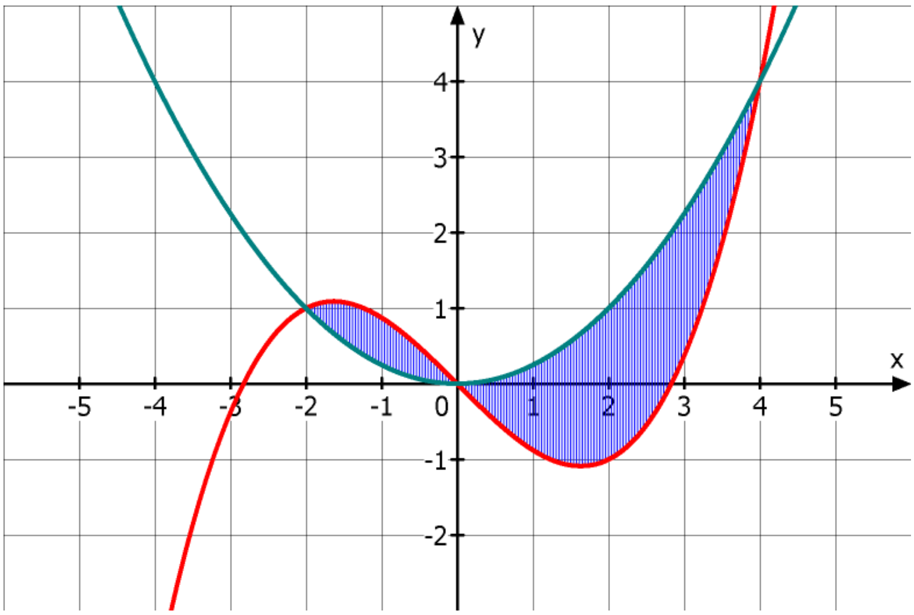
$g(x) = \frac{1}{2}x^2.$



Bestimme den Inhalt der schraffierten Fläche.

4. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x) = x - 2 + \frac{6}{x+5}$ und der der x--Achse eingeschlossen wird.

5.



Das Bild zeigt die Graphen von $f : x \to \frac{1}{8}x^3 - x$ und $h : x \to \frac{1}{4}x^2$.

Berechne die Inhalte der beiden schraffierten Flächen.

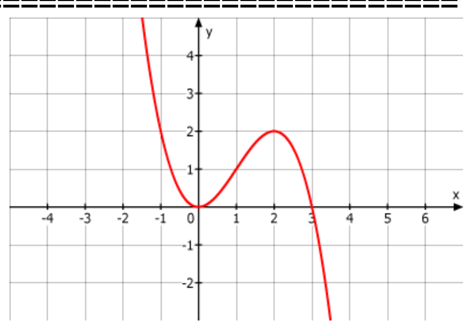
$$\int_{-2}^{0}(\frac{1}{8}x^3 - x - \frac{1}{4}x^2)dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_{-2}^{0} = -(\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}) = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_{0}^{4}(\frac{1}{8}x^3 - x - \frac{1}{4}x^2)dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_{0}^{4} = 8 - 8 - \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{16}{3}$$

Integralfunktionen

===

1. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



a) Welche Aussagen ergeben sich hieraus für die

Integralfunktion $I_a : x \to I_a(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$

im Hinblick auf Monotonie und Extremstellen

b) Begründen Sie, dass I_a in Abhängigkeit von a eine, zwei aber keine drei Nullstellen besitzen kann und geben jeweils ein Beispiel.

c) Zeigen Sie den Graphen von I_{-1} in das Koordinatensystem

1. a) Monotonie: I_a ist in $]-\infty; 3]$ sms und in $[3; \infty[$ smsf

Extremstelle: $x = 3$

b) Nur eine Nullstelle, wenn sonst kein Flächenausgleich möglich ist: $a = 3$

Zwei Nullstellen, wenn zusätzlicher Flächenausgleich möglich ist: $a = 0$

Drei Nullstellen sind nicht möglich, da maximal nur einmal Flächenausgleich möglich ist.

Lösung

===

Stammfunktionen

---

1. a) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x} = \frac{x^2+2x+1}{2x} = \frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{2}\ln|x|$

b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$

c) $f(x) = (e^{2x}-e^{-x})^2 = e^{4x}-2e^{x}+e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}e^{4x}-2e^{x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$

---

2. Bestimme eine Stammfunktion

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

b) $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1} \overset{\text{Erweitern}}{=} \frac{e^{x}}{(e^{-x}+1)\cdot e^{x}} = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(1+e^{x})$

c) $f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|\ln x|$

d)) $f(x) = \frac{2x-1}{4x^2-1} = \frac{2x-1}{(2x+1)\cdot(2x-1)} = \frac{1}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln|2x+1|$

----

3. Bestimme eine Stammfunktion

a) $f(x) = e^{1-2x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{1-2x}$

b) $f(x) = \sin x\cdot\cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\cdot\sin^2 x$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} = (2x-1)^{-\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\cdot(2x-1)^{\frac{2}{3}}$

Flächenberechnung

==

1. Nullstellen: $a\cdot x^2-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{a} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{\sqrt{a}} \vee x = \frac{2}{\sqrt{a}}$ falls $a>0$

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}} (ax^2-4)dx = \left[\frac{a}{3}x^3-4x\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}} = \frac{8}{3\sqrt{a}} - \frac{8}{\sqrt{a}} = -\frac{16}{3\sqrt{a}}$$

$A(a) = \frac{16}{3\sqrt{a}}$

Bedingung: $\frac{16}{3\sqrt{a}} = 5\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 1$

----

2. $\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$ und damit $A = \frac{16}{3}+2 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$

----

3. $\int_{-1}^{1}(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2}x^2)dx = \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{1} =$

$= (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{6}) - (\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{6}) = \frac{4}{3}$

----

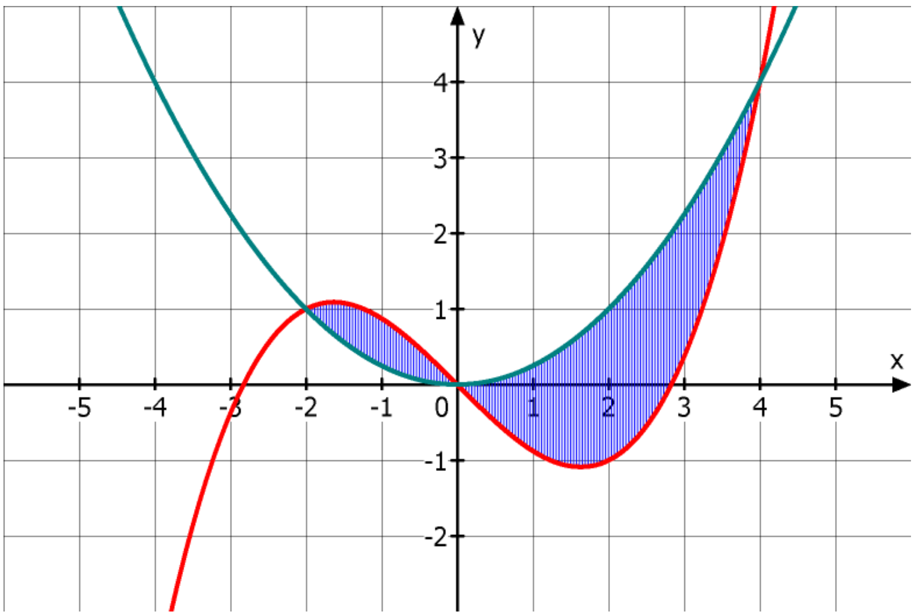
4. Nullstellen: $x-2+\frac{6}{x+5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+5)+6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+5x-2x-10+6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -4 \vee x = 1$

$$\int_{-4}^{1}(x-2+\frac{6}{x+5})dx = \left[\frac{1}{2}x^2-2x+6\cdot\ln|x+5|\right]_{-4}^{1} = (\frac{1}{2}-2+6\cdot\ln6) - (8+8+0) =$$

$$= -14{,}5+6\cdot\ln6 < 0 \quad\Rightarrow\quad A = 6\cdot\ln6-14{,}5$$

5.



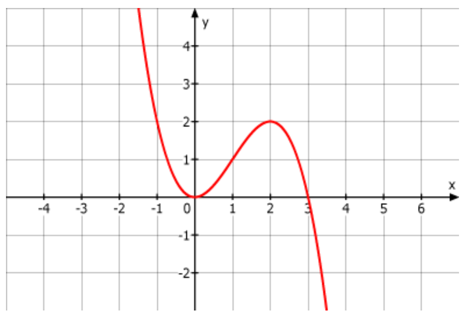
Das Bild zeigt die Graphen von $f: x \to \frac{1}{8}x^3 - x$ und $h: x \to \frac{1}{4}x^2$.

Berechne die Inhalte der beiden schraffierten Flächen.

Integralfunktionen

---

1. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



a) Welche Aussagen ergeben sich hieraus für die

Integralfunktion $I_a: x \to I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$

im Hinblick auf Monotonie und Extremstellen

b) Begründen Sie, dass I_a in Abhängigkeit von a eine, zwei oder drei Nullstellen besitzen kann und geben jeweils ein Beispiel.

c) Zeigen Sie den Graphen von I_{-1} in das Koordinatensystem

---