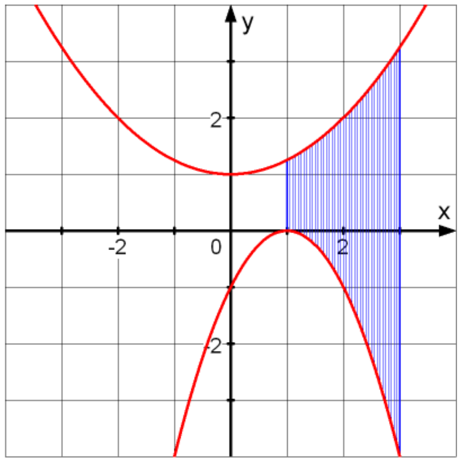
Integration

===

1. Die Graphen der Funktionen f: $x \to -x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ und f: $x \to \frac{1}{2}x^2 + 1$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie ihren Inhalt.

---

2. Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche zwischen den beiden Parabeln.



---

3. In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel das Rechteck ABCD mit $A(0\,|\,0)$, $B(2\,|\,0)$, $C(2\,|\,4)$ und $D(0\,|\,4)$?

---

4. In welchem Verhältnis teilt die Gerade $g: y = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $f: x \to -x^2 + 9$ und h: $x \to x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche?

---

5. Gegeben ist die Funktion f: $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ mit $x > 0$.

   a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die zu $x = 1$ und $x = 4$ gehörenden Ordinaten miteinander einschließen.

   b) Ermitteln Sie die Gleichung der Parallelen zur y-Achse, die diese Fläche halbiert.

   c) Ermitteln Sie die Gleichung der Parallelen zur x-Achse, die diese Fläche halbiert.

---

6. Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f: $x \to x^3 + x^2 - 6x$ mit der x-Achse eingeschlossen wird.

---

7. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch f_a: $x \to -x^2 + (a-2)\cdot x + 2a$.

   a) Berechne den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f_a und der x-Achse begrenzt wird.

   b) Für welchen Wert des Parameters a ist der Flächeninhalt gleich 15?

c) Für welchen Wert des Parameters $a \in [1; 3]$ ist der Flächeninhalt maximal?

Wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

---

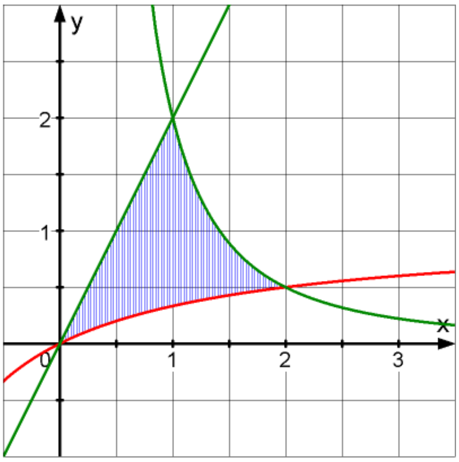
8. Gegeben ist die Funktion $f: x \to (x-2)\cdot e^{0,5x}$ mit $D = \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie den Grapen von f auf Achsenschnittpunkte und Extrempunkte sowie auf Asymptoten. Zeichnen den Graphen für $-5 \le x \le 3$.

b) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (2x-8)\cdot e^{0,5x}$ eine Stammfunktion von f ist.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch den Graphen von f und die beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

9.



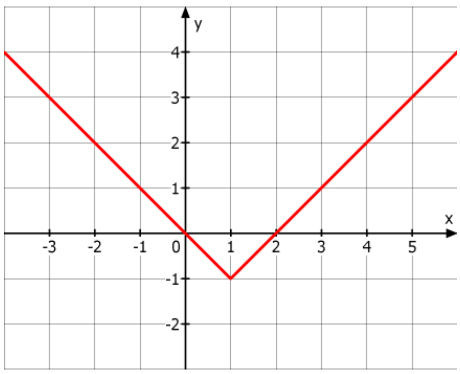
Die Graphen der Funktionen

$f: x \to \dfrac{x}{x+2}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $g: x \to 2x$, $D = \mathbb{R}$, und $h: x \to \dfrac{2}{x^2}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

begrenzen im 1. Quadranten einkrummlinig begrenztes "Dreieck". Bestimme Sie seinen Inhalt.

---

10. Das Bild zeigt den Graphen einer abschnittweisen linearen Funktion



$f: x \to y = f(x)$

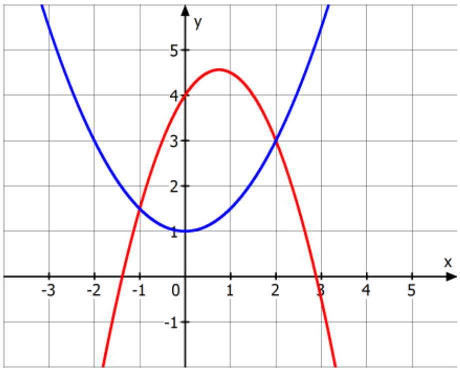
Die Integralfunktion $I_a : x \to \int_a^x f(t)dt$ hat die untere Integrationsgrenze a.

Für welche Werte von a hat I_a eine, zwei oder drei Nullstellen? Begründen Sie.

Lösung

===

1.



Schnittstellen: $-x^2+\frac{3}{2}x+4 = \frac{1}{2}x^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+3 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2 = 0$

$x = 2 \vee x = -1$

$$\int_{-1}^{2}[(-x^2+\frac{3}{2}x+4)-(\frac{1}{2}x^2+1)]dx = \int_{-1}^{2}(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3)dx = \left[-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x+3x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= (-4+\frac{3}{2}+6) - (\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-3) = 6\frac{3}{4}$$

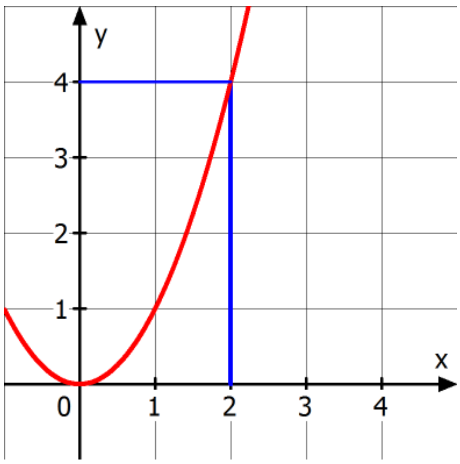
----

2. $\int_{1}^{3}[\frac{1}{2}x^2+1)+(x-1)^2]dx = \left[\frac{1}{6}x^3+x+\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1}^{3} = (4{,}5+3+\frac{8}{3})-(\frac{1}{6}+1+0) = 8$

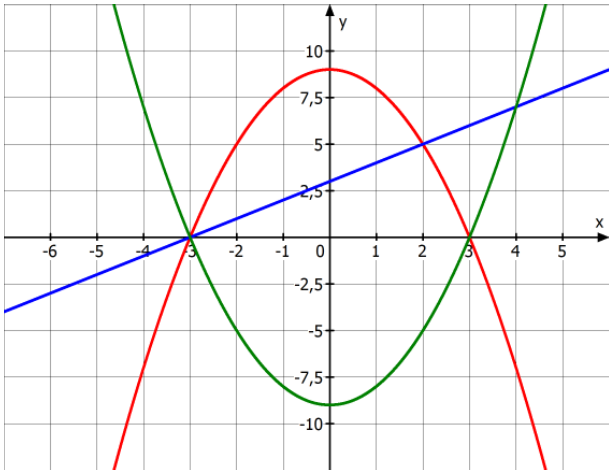
----

3. $\int_{0}^{2}x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2} = \frac{8}{3}$

Teilverhältnis: $\frac{8-\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{2}{1}$



4.



$$\int_0^3 (-x^2+9)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_0^3 = 18$$

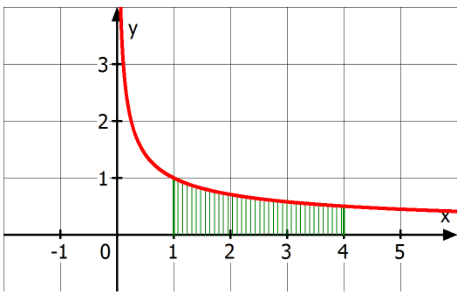
Die Parabeln schließen also eine Fläche vom Inhalt $4 \cdot 18 = 72$ ein.

Schnittstellen: $-x^2+9 = x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 2$

$$\int_{-3}^{2} [-x^2+9)-(x-3)]dx = \int_{-3}^{2} [-x^2-x+6]dx = \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6}$$

Teilverhältnis: $\dfrac{20\frac{5}{6}}{72-20\frac{5}{6}} = \dfrac{125}{307}$

5.



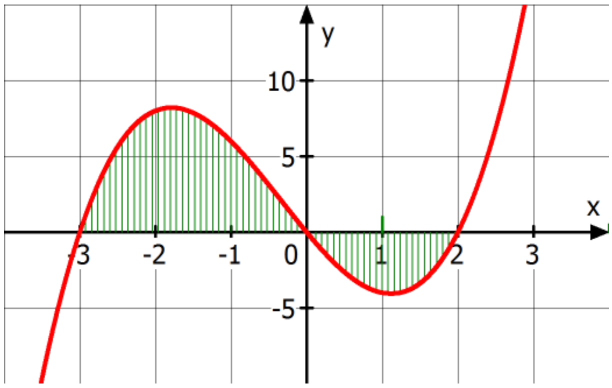
a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$

b) Bedingung: $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{a}-2 = 1 \text{ (vgl. a)} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{4}$

Gerade: $x = \dfrac{9}{4}$

c) Gerade: $y = \frac{1}{3}$

6.



Nullstellen: $x^3 + x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 + x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2$

$$\int_{-3}^{0} (x^3 + x^2 - 6x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{-3}^{0} = \frac{63}{4}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 + x^2 - 6x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_{0}^{2} = -\frac{16}{3}$$

$$A = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$$

---

7. $f_a(x) = -x^2 + (a-2) \cdot x + 2a = 0$

$$D = (a-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2a = a^2 - 4a + 4 + 8a = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$$

$$x = \frac{-(a-2) - (a+2)}{2 \cdot (-1)} = a \vee x = \frac{-(a-2) + (a+2)}{2 \cdot (-1)} = -2$$

$$\int_{-2}^{a} (-x^2 + (a-2) \cdot x + 2a)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + (a-2) \cdot \frac{x^2}{2} + 2ax\right]_{-2}^{a} =$$

$$= \left(-\frac{a^3}{3} + (a-2) \cdot \frac{a^2}{2} + 2a^2\right) - \left(\frac{8}{3} + (a-2) \cdot 2 - 4a\right) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3}$$

$$A(a) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3} \text{ da } a > 0$$

b) $A(a) = \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = 90 \quad \Leftrightarrow \quad (a+2)^3 = 90$

$a = \sqrt[3]{90} - 2$

(schwer!)

c) $A'(a) = \frac{1}{2}a^2 + 2a + 2 = \frac{1}{2}\cdot(a+2)^2 > 0$ für $a > 0$

d.h. der Flächeninhalt nimmt monoton mit a zu.

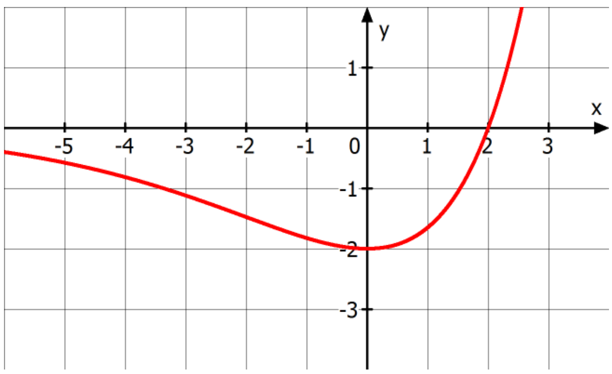
Der Flächeninhalt ist am größten für $a = 3$. Er beträgt $\frac{125}{6}$.

---

8. a) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad S_x\left(2\,|\,0\right)$

$f(0) = -2 \quad S_y\left(0\,|\,-2\right)$

$f'(x) = 1\cdot e^{0,5x} + (x-2)\cdot e^{0,5x}\cdot(-0,5) = x\cdot e^{0,5x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad T\left(0\,|\,-2q\right)$



b) $F'(x) = 2\cdot e^{0,5x} + (2x-8)\cdot e^{0,5x}\cdot 0,5 = (x-2)\cdot e^{0,5x}$

c) $\int_0^2 (x-2)\cdot e^{0,5x}dx = \left[(2x-8)\cdot e^{0,5x}\right]_0^2 = -4e+8 \quad \Rightarrow \quad A = 4e-8$

---

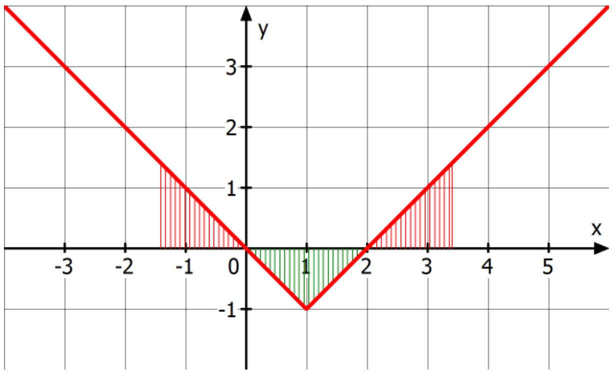
9. $\int_0^1 (2x - \frac{x}{x+2})dx = \int_0^1 (2x - \frac{x+2-2}{x+2})dx = \int_0^1 (2x - 1 + \frac{2}{x+2})dx = \left[x^2 - x + 2\cdot\ln(x+2)\right]_0^1 =$

$= 2\cdot\ln 3 - 2\cdot\ln 2 = 2\cdot\ln\frac{3}{2}$

$\int_1^2 (\frac{2}{x^2} - \frac{x}{x+2}) = \left[-\frac{2}{x} - x + 2\ln(x+2)\right]_1^2 = -1 - 2 + 2\cdot\ln 4 + 2 + 1 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{4}{3}$

$A = 2 \cdot \ln\frac{3}{2} + 2 \cdot \ln\frac{4}{3} = 2 \cdot \ln 2$

10.



Die Integralfunktion neben der Nullsstelle $x =$ a weitere Nullstellen, wenn es einen Flächenausgleich gibt.

Es gibt nur eine Nullstelle, wenn $a < -\sqrt{2}$ oder $a > 2+\sqrt{2}$ ist.

Es gibt zwei Nullstellen, wenn $a = -\sqrt{2}$ oder ist.

Es gibt drei Nullstellen, wenn $-\sqrt{2} < a < 2+\sqrt{2}$ ist.
