

Spatprodukt

1. Die Punkte $A(2 | 1 | 1)$, $B(6 | 3 | 2)$, $D(-2 | -1 | 2)$ und $E(3 | 2 | 5)$ sind die Ecken eines Spats ABCDEFGH.

Berechnen Sie seinen Rauminhalt.

2. Die Punkte $A(3 | 1 | 1)$, $B(4 | 5 | -1)$ und $D(-2 | 1 | 1)$ sind die Eckpunkte eines Spats ABCDEFGH.

Der Eckpunkt E liegt auf der x_3 -Achse und der Rauminhalt des Quaders beträgt 24 VE.

Bestimme die Koordinaten von E.

3. Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken $A(3 | -6 | 1)$, $B(-2 | -2 | 13)$ $C(6 | -2 | 5)$ und der Spitze $D(-6 | 12 | 1)$.

Berechne das Volumen der Pyramide.

4. Eine Pyramide hat die Eckpunkte $A(4 | 0 | 0)$, $B(0 | 6 | 0)$, $C(0 | 0 | 0)$ und $D(0 | 0 | 3)$.

a) Stelle die Pyramide in einem Koordinatensystem dar und berechne das Volumen der Pyramide.

b) Berechne die Oberfläche der Pyramide.

Lösungen

$$1. \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AE} = \vec{E} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{AB} \times \vec{AD} \right) \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \Rightarrow V_{\text{Spat}} = 4$$

2. Ansatz: $E(0|0|e)$

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{AE} = \vec{E} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ e-1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bedingung: } \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ e-1 \end{pmatrix} \right| = 24 \Leftrightarrow |20e-20| = 24 \Rightarrow e = 2,4 \vee e = -0,2$$

3. Das Volumen der Pyramide ist gleich einem Sechstel des Volumen des Spats mit den Ecken A, B, C und D.

$$V_{\text{ABCD}} = 216$$

4. Volumen und Oberfläche lassen sich elementar berechnen.

$$V_{\text{ABCD}} = 12 \quad Q_{\text{ABCD}} = 27 + 3\sqrt{29}$$
