**Kugeln**

==================================================================

1. Untersuche, ob der Punkt P auf, innerhalb oder außerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkt $M\left(5 \mid -2 \mid 4\right)$ und dem Radius $r = 9$ liegt.

   a) $P\left(-1 \mid 4 \mid 5\right)$  b) $P\left(0 \mid 5 \mid 5\right)$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

2. Die Strecke [AB] mit $A\left(9 \mid -2 \mid 0\right)$ und $B\left(-3 \mid 4 \mid 4\right)$ ist der Durchmesser einer Kugel k mit dem Radius r.

   Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von k mit der $x_2$-Achse.

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

3. Bestimme Mittelpunkt M und Radius r einer Kugel k, welche

   a) durch die Punkte $A\left(-2 \mid 1 \mid 4\right)$ und $B\left(6 \mid -5 \mid 6\right)$ geht und deren Mittepunkt auf der $x_1$-Achse liegt.

   b) die $x_1x_2$- und $x_2x_3$-Koordinatenebene berührt und durch durch den Punkt $P\left(2 \mid 1 \mid -2\right)$ geht.

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

4. Gegeben sind die Punkte Punkte $A\left(3 \mid 1 \mid 0\right)$, $B\left(7 \mid 3 \mid 4\right)$ und $C\left(5 \mid -1 \mid 8\right)$.

   a) Zeige, dass die drei Punkte durch weitere Punkte zu einem Würfel ABCDEFGH ergänzt werden können.

   b) Bestimme die Gleichung der Umkugel dieses Würfels

5. Die Punkte $M_1\left(4 \mid 3 \mid 6\right)$ und $M_2\left(8 \mid 2 \mid -2\right)$ sind die Mittelpunkte zweier sich schneidender Kreise.

   Bestimme den Radius des Schnittkreises, wenn auf diesem der Punkt $P\left(6 \mid 7 \mid 2\right)$ liegt.

---

**Lösungen**

================================================================

1. a) $\overrightarrow{MP} = \vec{P} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\overline{MP} = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

Der Punkt P liegt auf der Kugel.

b) $\overrightarrow{MP} = \vec{P} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\overline{MP} = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} < 9$$

Der Punkt P liegt im Innern der Kugel.

---

2. $\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{A} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad r = \overline{MA} = 7$

Kugelgleichung: $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 7^2$

Schnittpunkte mit der $x_1$-Achse: $x_2 = x_3 = 0$

$(x_1 - 3)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - 3)^2 = 45 \quad \Rightarrow$

$x_1 = 3 - 3\sqrt{5} \ \vee \quad x_1 = 3 + 3\sqrt{5}$ und damit $S_{x_1}\left(3 - 3\sqrt{5} \mid 0 \mid 0\right)$ oder $S_{x_1}\left(3 + 3\sqrt{5} \mid 0 \mid 0\right)$

Analog

$S_{x_2}\left(0 \mid -5 \mid 0\right)$ oder $S_{x_2}\left(0 \mid 7 \mid 0\right)$ und $S_{x_3}\left(0 \mid 0 \mid 2 - \sqrt{35}\right)$ oder $S_{x_3}\left(0 \mid 0 \mid 2 + \sqrt{35}\right)$

---

3. a) Ansatz: $M\left(m \mid 0 \mid 0\right)$

Bedingung: $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \quad \Rightarrow \quad (-2-m)^2+1^2+4^2 = (6-m)^2+(-5)^2+6^2$

$\Rightarrow \quad m = 5{,}25$

$M\left(4{,}75 \mid 0 \mid 0\right)$ und $r = \frac{1}{4}\sqrt{1001}$

b) Der Mittelpunkt der gesuchten Kugel liegt im 5. Quadranten.

Ansatz: $M\left(r \mid r \mid -r\right)$

$(3-r)^2+(3-r)^2+(-6+r)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 3 \vee r = 6$

mit den Mittelpunkten $M\left(3 \mid 3 \mid -3\right)$ bzw. $M\left(6 \mid 6 \mid -6\right)$

---

4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -8-8+16 = 0$ und

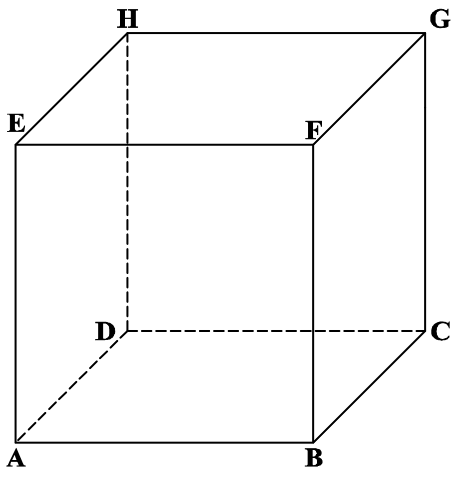
$\overline{AB} = \overline{BC} = 6$

b) Der Mittelpunkt der Umkugel ist der Mittelpunkt des Würfels.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CG} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \vec{G} = \vec{C} + \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

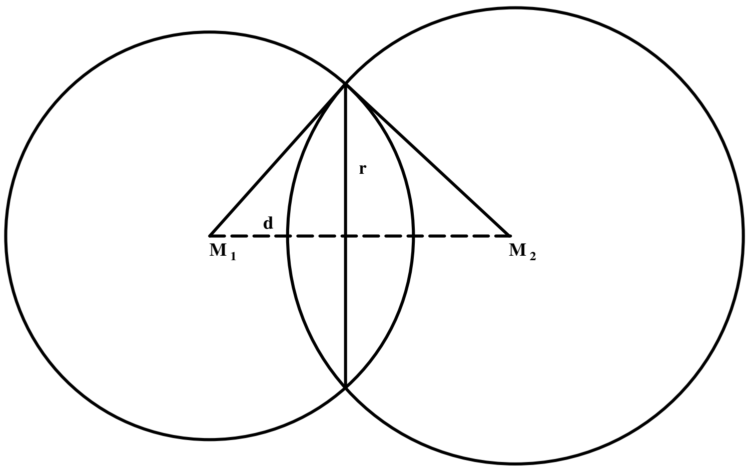
$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{G}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $r = 6\sqrt{3}$




---

5. $\overline{M_1M_2} = 9 \quad \overline{M_1P} = 6 \quad \overline{M_2P} = 3\sqrt{5}$

$$r^2 = \overline{M_1P}^2 - d^2 = \overline{M_2P}^2 - (9-d)^2 \quad \Rightarrow \quad d = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2\sqrt{5}$$




---