Extremwertaufgaben

===

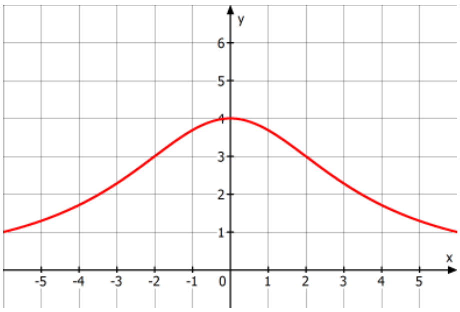
1. Bestimme die beiden Zahlen mit der Summe 1 so, dass ihre Quadratsumme möglichst klein ist.

---

2. Bestimme den Punkt auf der Parabel p mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$, der vom Punkt P(6 | 0) den kürzesten Abstand ?

---

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{x^2 + 12}$.



Die Eckpunkte A und B des Rechtecks ABCD liegen auf der x-Achse und C und D auf dem Graphen von f. Bestimme die Punkte so, dass der Inhalt des Recktecks maximal ist.

---

4. Die Punkte $A\left(3 \mid 3\right)$ und $B\left(0 \mid 2\right)$ sind Eckpunkte eines Dreiecks ABC, dess Punkt C auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln x$ liegt.
Wie muss C gewählt werden, damit der Inhalt des Dreiecks ABC minimal ist.

Lösungen

---

1. Größe: $S(x,y) = x^2 + y^2$

   Nebenbedingung: $x + y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x$

   Zielfunktion: $S(x) = x^2 + (1-x)^2$

   Extremwertbestimmung: $s'(x) = 2x + 2\cdot(1-x)\cdot(-1) = 2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

   Eine Montoniebetrachtung ergibt, dass ein Minimum der Summe vorliegt.

---

2. Größe: $d(x,y) = \sqrt{(6-x)^2 + y^2}$

   Nebenbedingung: $y = \frac{1}{2}x^2$

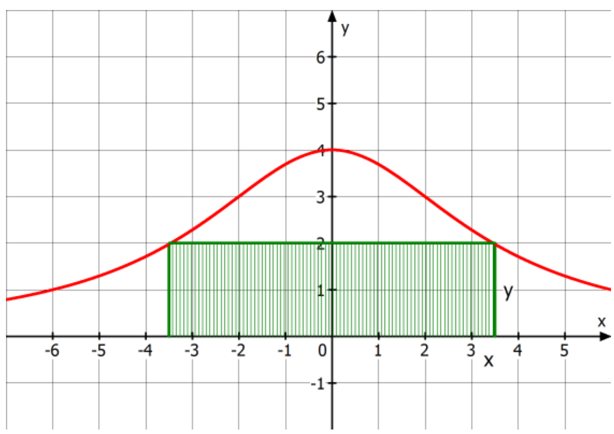
   Zielfunktion: $d(x) = \sqrt{(6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2}$

   Extremwertbestimmung: $d'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{(6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2}} \cdot [2\cdot(6-x)\cdot(-1) + x] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

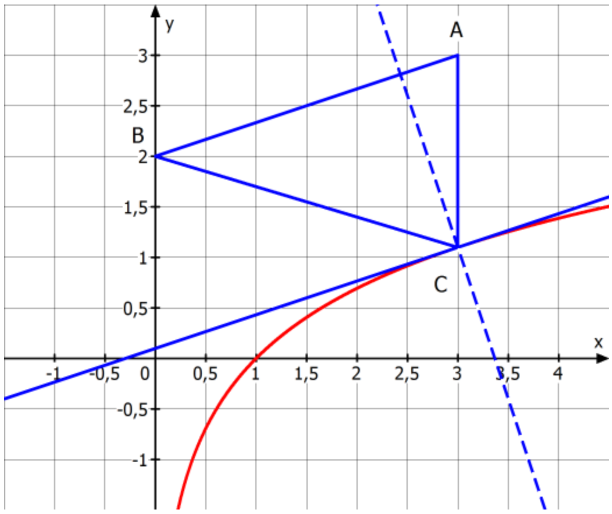
   Eine Montoniebetrachtung ergibt, dass ein Minimum des Abstands vorliegt.

   Der Punkt $Q\left(2 \mid 2\right)$ hat vom Punkt P den geringsten Abstand.

3.



4.



Das Dreieck ABC hat minmalen Inhalt, wenn h_c minimal ist.

Also ist $C\left(3 \mid \ln 3\right)$ der gesuchte Punkt.
