Integralrechnung

==

Frage Wie berechnet man das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ und welche Bedeutung hat sein Wert.

Antwort 1. Man bestimmt eine Stammfunktion F(x) von f d.h. eine Funktion F mit

$$F'(x) = f(x)$$

2. Man rechnet dann $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

3. Der Wert des bestimmen Integrals $\int_a^b f(t)dt$ ist gleich der Differenz der Inhalte der Flächen, die der Graph von f zwischen a und b ober- und unterhalb der x-Achse mit dieser einschließt.

Frage Was ist eine Integralfunktion und wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Antwort Ist f eine auf einem Intervall I definierte und stetige Funktion und $a \in I$, dann heißt die Funktion

$I_a : I \to \mathbb{R}$ mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ Integralfunktion von f mit der unteren Grenze a.

Die Funktion I_a ist in I differenzierbar und es gilt

$$\boxed{I_a'(x) = f(x)} \text{ (HDI)}$$

d.h. I_a ist eine Stammfunktion von f.

Frage Warum besitzt jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle und was kann dazu führen, dass weitere Nullstellen existieren.

Antwort Jede Integralfunktion besitzt ihre untere Integrationsgrenze als Nullstelle

$$I_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Weitere Nullstellen können sich durch Ausgleich der Flächen ober- und unterhalb der x-Achse ergeben.

Frage Wie lässt sich der ungefähre Verlauf einer Integralfunktion I_a mit

$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ bzw. einer StammfunktionF einer Funktion f finden, wenn der

Graph der Funktion f gegeben ist?

Antwort Mit Hilfe der Deutung des Integralwerts als Flächenbilanz (Integrationsrichtung beachten) lässt sich durch Flächenabschätzung eine Wertetabelle mit Näherungswerten für die Integralfunktion finden.

Weiterhin gilt

a) Die Integralfunktion besitzt ihre untere Integrationsgrenze als Nullstelle.

b) Weitere Nullstellen können sich durch Flächenausgleich ergeben.

c) Schnittstellen der Integrandenfunktion f mit der x-Achse sind Extremstellen der Integralfunktion.

d) Die Funktionswerte von f sind gleich den Steigungen der Tangenten an den Graphen der Integralfunktion in den entsprechenden Punkten.

Ist lediglich der Graph einer Stammfunktion F on f gesucht, dann zeichnet man man den Graphen einer Integralfunktion von f mit (geschickt) selbstgewählter unterer Integrationsgrenze.

Frage Was versteht man unter dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$?

Antwort Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f.

Ist F(x) eine Stammfunktion von f(x), dann ist auch $F(x)+C$ eine Stammfunktion von f(x) und man schreibt

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$$

Übersicht

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = 1$	$F(x) = x$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$F(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$
$f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f(x) = \ln\lvert x\rvert$
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \cdot \ln x - x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$

Frage Was versteht man unter logarithmischer Integration?

Antwort Hat der Funktionsterm einer gebrochen rationalen Funktion die Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$

mit einer ganzrationalen Funktion f und hat die Funktion f in ihrer Definitionsmenge keine Nullstelle, dann gilt

$$\boxed{\int f(x)dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C}$$

d.h. $\ln\lvert f(x)\rvert$ ist eine Stammfunktion von $\frac{f'(x)}{f(x)}$

Frage Die Funktion F(x) ist differenzierbar mit der Ableitung f(x).

Wie lautet dann die Ableitung von $F\left(g(x)\right)$ mit einer differenzierbaren Funktion g'(x) ?

Welche Integrationsregel lässt sich daraus herleiten

Antwort Die Ableitung lautet gemäß der Kettenregel $f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$:

Es ergibt sich $\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + C$

Beispiele:

a) $\int \overbrace{2x}^{g'(x)}\cdot e^{\overbrace{x^2}^{g(x)}}dx = e^{x^2} + C$

b) $\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

c) $\int \sin(\frac{1}{2}x + \pi)dx = -2\cdot\cos(\frac{1}{2}x + \pi) + C$

Frage Wie berechnet man den Inhalt der Fläche, den der Graph einer Funktion f mit den zu a und b gehörenden Ordinaten und der x-Achse einschließt?

Antwort Wenn der Graph von f die x-Achse im Intervall [a; b] nicht schneidet, dann berechnet man das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$.

Der Betrag des Integralwerts ist dann der gesuchte Flächinhalt.

Schneidet der Graph von f die x-Achse, dann berechnet man die Inhalte der enstehenden Teilflächen und addiert diese.

Frage Wie bestimmt man den Inhalt der Fläche, den der Graph einer Funktion F mit der x-Achse einschließt?

Antwort Sind x_0 und x_1 benachbarte Nullstellen, dann berechnet man das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$. Der Betrag des Integralwerts ist der Inhalt der eingeschlossenen Fläche.

Schneidet der Graph von f die x-Achse mehrfach, dann berechnet man die Inhalte der entstehenden Teilflächen und addiert diese.

Frage Wie berechnet man den Inhalt der Fläche, die von den Graphen zweier Funktionen f und g eingeschlossen wird.

Antwort Sind x_0 und x_1 benachbarte Schnittstellen von f und g , dann berechnet man das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_1} [f(x) - g(x)]dx$.

Der Betrag des Integralwerts ist der Inhalt der eingeschlossenen Fläche.

Überschneiden sich die Graphen, dann berechnet man die Inhalte der entstehenden Teilflächen und addiert diese.

Frage Wie berechnet die Änderung einer Größe G(t) im Intervall $\left[t_1 ; t_2\right]$, wenn ihre lokale Änderungsrate $G'(t) = r(t)$ gegeben ist?

Antwort Ist r(t) die lokale Änderungsrate eines Größe G(t), dann ist die Änderung von G im Intervall $\left[t_1 ; t_2\right]$ gegeben durch

$$\boxed{\Delta G = G(t_2) - G(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} r(t)dt}$$

Aufgaben

==

1. Berechne die Integralwerte!

a) $\int_{-1}^{2}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3)dx$ b) $\int_{-1}^{-2}(1-\frac{4}{x^2})dx$ c) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x}dx$ d) $\int_{1}^{4}(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx$

---

2. Bestimme jeweils eine Stammfunktion von f.

a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+2}$ c) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

d) $f(x) = 4\cdot\sin(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})$ e) $f(x) = 4x\cdot e^{-\frac{1}{3}x^2}$ f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

---

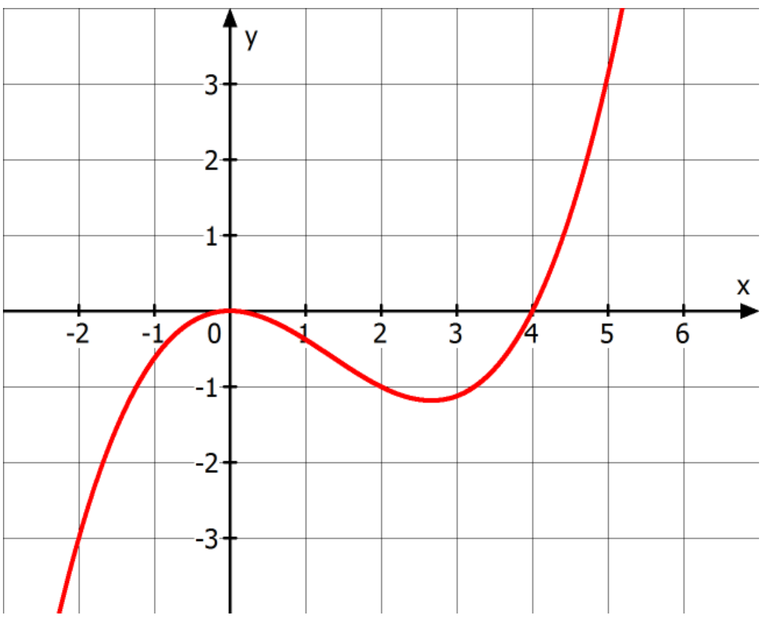
3. Berechne den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen $f : x \to f(x) = x^2+5x$ und $g : x \to g(x) = 3-x^2$ miteinander einschließen.

---

4. Berechne den Inhalt des Flächenstücks das der Graph der Funktion

$f : x \to f(x) = (e^x-1)\cdot(e^x-4)$ mit der x-Achse eindschließt.

5.



Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f. Zeichne den Graphen der Integralfunktion

$I_0 : x \to \int_0^x f(t)dt$ in das Koordinatensystem

*

Krümmungsverhalten einer Funktion

===

Frage Wann heißt eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion f in diesem linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt?

Antwort Die Funktion f heißt linksgekrümmt in einem Intervall I, wenn ihre Ableitung f ' in diesem Intervall streng monoton wachsend ist.

Dies ist u.a. der Fall, wenn f in I zweimal differenzierbar ist und

$$\boxed{f''(x) > 0}$$

in I gilt.

Die Funktion f heißt rechtsgekrümmt in einem Intervall I, wenn ihre Ableitung f ' in diesem Intervall streng monoton fallend ist.

Dies ist u.a. der Fall, wenn f in I zweimal differenzierbar ist und

$$\boxed{f''(x) < 0}$$

in I gilt.

Frage Was versteht man unter einer Wendestelle einer Funktion?

Antwort Eine Stelle x_0 in der Definitionsmenge D einer Funktion heißt eine Wendestelle von f, wenn f links und rechts von x_0 unterschiedliches Krümmungsverhalten hat.

Frage Wo kann sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f ändern?

Antwort Das Krümmungsverhalten einer Funktion f kann sich

a) an einer Wendestelle

b) an einer Definitionslücke

ändern.

Frage Wie ermittelt man die Wendepunkte einer zweimal differenzierbaren Funktion f und wie bestimmt die Gleichung einer Wendetangente?

Antwort

1. Man bestimmt die zweite Ableitung $f''(x)$.

2. Man berechnet die Nullstellen der zweíten Ableitung.

   Ist x_0 eine dieser Nullstellen und ändert die Funktion f an dieser Stelle ihr Krümmungsverhalten oder ist $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist der Punkt $\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von f.

3. Man berechnet $f'(x_0)$ und stellt mit der Tangentenformel

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

   die Tangentengleichung auf.

Übersicht

Gilt in einem Intervall für eine Funktion	dann ist f in diesem Intervall
$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$f'(x) < 0$	streng monoton fallend
$f''(x) > 0$	linksgekrümmt
$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

Gilt an einer Stelle x_0 für eine Funktion f	dann hat f an dieser Stelle x_0
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x) > 0$	einen Tiefpunkt
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x) < 0$	einen Hochpunkt

Gilt in einem Intervall für eine Funktion f	dann ist eine Stammfunktion F von f in diesem Intervall
$f(x) > 0$	streng monoton steigend
$f(x) < 0$	streng monoton fallend
$f'(x) > 0$ d.h. f ist streng monoton steigend	linksgekrümmt
$f'(x) < 0$ d.h. f ist streng monoton fallend	rechtsgekrümmt

Gilt an einer Stelle x_0 für eine Funktion f	dann hat eine Stammfunktion F an dieser an dieser Stelle x_0
$f(x_0) = 0$ mit VZW $- \to +$	einen Tiefpunkt
$f(x_0) = 0$ mit VZW $+ \to -$	einen Hochpunkt
Hat die Funktion an der Stelle x_0 einen Extrempunkt	dann hat eine Stammfunktion F an dieser an dieser Stelle x_0 einen Wendepunkt

---

Aufgaben

---

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

   b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema von f.

   c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von f.

   d) Der Graph von f und seine Wendetangente schließen mit der y-Achse eine Flächenstück ein. Berechnen Sie dessen Inhalt.

---

2. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f mit $f(x) = \frac{2x - 3}{4x}$

---

3. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

   a) Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Extrempunkt, aber einen Wendepunkt besitzt und stellen ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente w auf..

   b) Zeichnen Sie den Graphen von f.

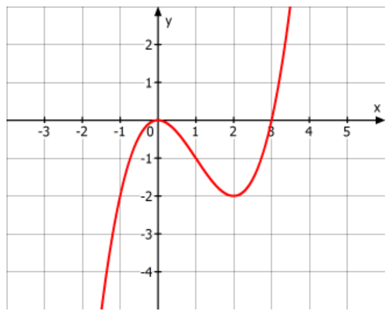
   b) Der Graph von f, die Gerade $y = 4$ und w schließen im 1. Quadranten ein unendlich ausgedehntes Flächenstück ein.

   Untersuchen Sie, ob dieses einen endlichen Inhalt besitzt.

---

4. Das Bild zeigt den Graphen einer Funktion f.

   Geben Sie die das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie die Extrem und Wendestellen einer Stammfunktion von f an.



Stochastik

===

Baumdiagramme, Zählprinzip, Urnenmodelle und Wahrscheinlichkeit

----

Eine Urne enthalte n verschiedene Kugeln. Es werden k Kugeln

a) hintereinander mit Zurücklegen

b) hintereinander ohne Zurücklegen

c) gleichzeitig gezogen.

Dann gibt es

a) $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\text{mal}} = n^k$ b) $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}$ c) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

verschiedene Ziehungen.

----

1. In einem Spiel wird eine L-Münze fünfmal geworfen. Erscheint dreimal nacheinander Zahl, so erhält der Spieler einen Preis.

   Wie groß ist die W'keit dafür?

----

2. Sechs Jungen und vier Mädchen sollen in zwei Mannschaften zu je 5 Spielern aufgeteilt werden. Auf wie viele Arten geht das,wenn in jeder Mannschaft mindestens ein Mädchen mitspielen soll?

----

3. Aus einer Gruppe von 8 Männern und 4 Frauen sollen 4 Personen für ein Tennisspiel ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

   a) keinerlei Beschränkungen bestehen,

   b) keine Frau mitspielen soll,

   c) genau 2 Frauen mitspielen sollen,

   d) höchstens 2 Frauen mitspielen sollen?

----

4. Drei Mädchen und drei Jungen setzen sich auf gut Glück nebeneinander auf eine Bank. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   a) die drei Mädchen nebeneinander sitzen,

   b) links außen ein Mädchen sitzt,

   c) eine sogenannte "bunte" Reihe entsteht.

----

5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei siebenmaligem Wurf eines L-Würfels jede Augenzahl mindestens einmal auftritt!

---

6. In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 2 rote Kugeln.

   Die Personen A und B vereinbaren folgendes Spiel: A und B ziehen abwechselnd Kugeln (ohne Zurücklegen) Gewinner ist, wer zuerst eine rote Kugel zieht.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A, wenn

   a) jeder jeweils genau eine Kugel ziehen darf und A beginnt?

   b) A mit einer Kugel beginnt, anschließend aber B und A jeweils 2 Kugeln ziehen dürfen?

---

7. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, auf denen jeweils eine der Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 steht.

   Die Personen A und B vereinbaren folgendes Spiel: A und B ziehen abwechselnd Kugeln (ohne Zurücklegen)

   Gewinner ist, wer zuerst die Kugel mit der Ziffer 0 zieht. Mit welcher W'keit gewinnt A, wenn

   a) jeder jeweils genau eine Kugel ziehen darf und A beginnt?

   b) A mit einer Kugel beginnt, anschließend aber B und A jeweils 2 Kugeln ziehen dürfen?

   c) A mit einer Kugel beginnt, bei jedem Personenwechsel sich aber die Anzahl der zu ziehenden Kugeln um 1 erhöht? (Also ABBAAABBBB...)

Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

---

1. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Zufallsgröße X ist gleich der Anzahl der verschiedenen Augenzahlen die man wirft.

   Erstelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und bestimmen den Erwartungswert von X.

---

2. Anton und Berta spielen folgendes Spiel:

   Anton wirft zwei Würfel. Er bekommt von Berta den Betrag der Differenz der beiden gewürfelten Zahlen in Euro. Allerdings muss er Berta für jeden Wurf 2 Euro als Einsatz zahlen. Die Zufallsgröße R ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Antons in Euro zu.

   a) Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeitsverteilung von R und zeichnen Sie ein Strichdiagramm.

   b) Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Anton im Mittel zu rechnen?

---

3. Anton und Berta spielen folgendes Spiel: Berta wirft eine Münze 5 mal. Sie erhält von Anton die maximale Anzahl unmittelbar hintereinander geworfener Wappen in Euro

.

Auch Berta muss pro Spiel einen Einsatz von 2 Euro zahlen. Die Zufallsgröße R ordnet jedem Ergebnis den Reingewinn Bertas in Euro zu.

a) Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeitsverteilung von R und zeichnen Sie ein Strichdiagramm.

b) Mit welchem Gewinn oder Verlust hat Berta im Mittel zu rechnen?

---

4. Ein Marmeladenbrot fällt in 60% aller Fälle auf die geschmierte Seite. Berechne die zu erwartende Anzahl an Butterbroten, die auf die belegte Seite fallen, wenn man 3 Brote fallen lässt.

---

5. Bei Einwurf von 1 € setzen sich unter einer Sichtscheibe zwei mit Ziffern beschriftete Räder in Bewegung. Jedes Rad lässt immer nur eine Ziffer sichtbar erscheinen. Auf dem linken Rad befinden sich einmal die Ziffer 1, einmal die Ziffer 2 und dreimal die Ziffer 3.

Auf dem rechten Rad befindet sich dreimal die Ziffer 2 und dreimal die Ziffer 3.

Es wird folgender Auszahlungsplan festgelegt:

- Zeigen beide Räder die gleiche Ziffer an, erhält der Spieler 2 € ausbezahlt.

- Zeigen beide Räder zwei Ziffern an, die sich um die Zahl 1 unterscheiden, erhält der Spieler 0,50 € ausbezahlt.

- In den anderen Fällen wird nichts ausbezahlt.

Die Zufallsgröße X ist der Gewinn pro Spiel

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße X.

b) Liegt ein faires Spiel vor?

Urnenexperimente

---

1. In einer Urne liegen 15 rote und 60 blaue, sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Es werden zehn Kugeln

a) hintereinander mit Zurücklegen   b) gleichzeitig gezogen.

Berechnen Sie die W'keit dass man genau 2 oder 3 rote Kugeln zieht.

---

2. Eine Warenlieferung von 50 gleichartigen Teilen enthalte 10% defekte Teile. Es werden 10 Teile ohne Zurücklegen entnommen und geprüft. Berechnen Sie die W'keiten für

A: Unter den getesteten Teilen ist kein Ausschussstück

B: Unter den überprüften Teilen ist höchstens ein Ausschussstück

C: Mehr als ein überprüftes Teil erweist sich als defekt.

Binomialverteilung

---

1. Ein Schütze hat eine Trefferquote von 60%.

Für die Aufgaben a) und b) wird angenommen, dass er 20 Schüsse abgibt.

a) Berechnen Sie die W'keit von

A: Der Schütze erzielt 13 Treffer

B: Der Schütze leistet sich zu Beginn gleich einen Fehlschuss, trifft aber doch noch 13 mal

C: Der Schütze trifft mehr als 15 mal ins Ziel

D: Die Anzahl der erzielten Treffer weicht um weniger als 3 vom Erwartungswert ab.

E: Von den ersten 10 abgegebenen Schüsse gehen 4 daneben, der Schütze erzielt aber trotzdem mehr als 15 Treffer.

b) Bestimmen Sie in welchem möglichst kleinem Intervall symmetrisch zum Erwartungswert die Anzahl der Treffer mit mehr als 90% W'keit liegt!

c) Bestimmen Sie die Mindestanzahl von Schüssen, die der Schütze mindestens abgeben muss um mit mehr als 99% W'keit mindestens einen Treffer zu landen!

Lösung Analysis

Integration

---

1. a) $\int_{-1}^{2}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right]_{-1}^{2} = (\frac{8}{6} - 1) - (-\frac{1}{6} - \frac{1}{16}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

b) $\int_{-1}^{-2}(1 - \frac{4}{x^2}) = \int_{-1}^{-2}(1 - 4x^{-2}) = \left[x + 4x^{-1}\right]_{-1}^{-2} = (-2-2) - (-1-4) = 1$

c) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-1}{x}dx = \int_{1}^{2}(x - \frac{1}{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{1}^{2} = (2 - \ln 2) - (\frac{1}{2} - 0) = \frac{3}{2} - \ln 2$

d) $\int_1^4 (3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})dx = \int_1^4 (3x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} - 2x^{-\frac{1}{2}})dx = \left[3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[2x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$

$= (16-8) - (2-4) = 10$

---

2. a) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ $\quad F(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

b) $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ $\quad F(x) = 2\cdot\ln(e^x+1)$

c) $f(x) = \sqrt{1-2x} = (1-2x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad F(x) = \frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3}\cdot(1-2x)^{\frac{3}{2}}$

d) $f(x) = 4\cdot\sin(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})$ $\quad F(x) = -4\cdot\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})\cdot\frac{2}{3} = -\frac{8}{3}\cdot\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})$

e) $f(x) = 4x\cdot e^{-\frac{1}{3}x^2}$ $\quad F(x) = -6\cdot e^{-\frac{1}{3}x^2}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad F(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

---

3. Gegeben: $f(x) = x^2+5x \quad g(x) = 3-x^2$

A Schnittstellen

$x^2+5x = 3-x^2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2+5x-3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3 \vee x = \frac{1}{2}$

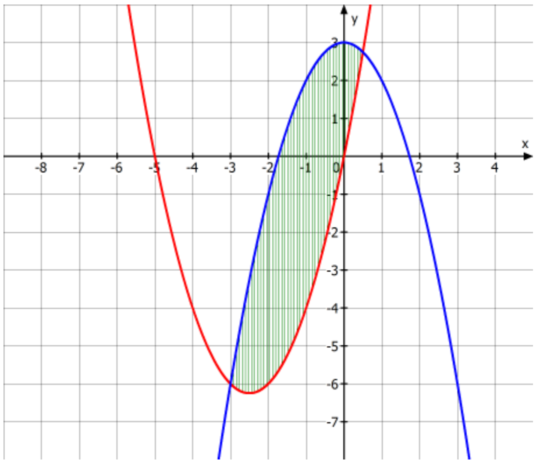
B Integral

$\int_{-3}^{\frac{1}{2}} [(x^2+5x)-(3-x^2)]dx = \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (2x^2+5x-3)dx = \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x)\right]_{-3}^{\frac{1}{2}} =$

$= (\frac{1}{12}+\frac{5}{8}-\frac{3}{2}) - (-18+\frac{45}{2}+9) = -\frac{19}{24} - 13\frac{1}{2} = -14\frac{7}{24}$

C Flächeninhalt

$A = |-14\frac{7}{24}| = 14\frac{7}{24}$



---

4. Gegeben: $f(x) = (e^x - 1)\cdot(e^x - 4)$

A Nullstellen

$$f(x) = (e^x - 1)\cdot(e^x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 1 = 0 \vee e^x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \ln 4$$

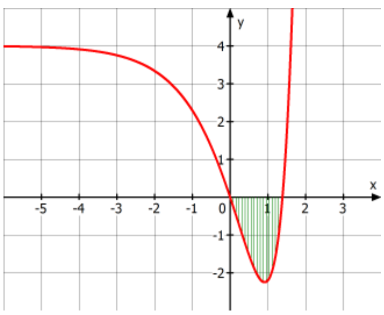
B Integral

$$\int_0^{\ln 4} (e^x - 1)(e^x - 4)dx = \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 5e^x + 4x\right]_0^{\ln 4} =$$

$$= (8 - 20 + 4\ln 4) - (\frac{1}{2} - 5) = -7{,}5 + 4\ln 4$$

C Fächeninhalt

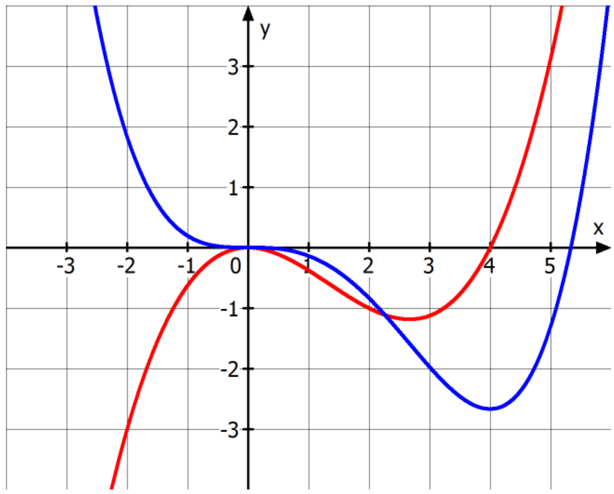
$$A = |-7{,}5 + 4\ln 4| = 7{,}5 - 4\ln 4$$



---

5. Wertetabelle (Flächenabschätzung)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$I_0(x)$	2	0,25	0	$-0{,}2$	$-0{,}9$	-2	$-2{,}8$	$-1{,}2$



Krümmungsverhalten

---

1. Gegeben: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 3$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (\frac{1}{2}x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$

$f''(x) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1 < 0 \quad \rightarrow \quad E_1\left(0 \mid 0\right)$ ist ein Hochpunkt

$f''(2) = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad E_2\left(2 \mid -\frac{2}{3}\right)$ ist ein Tiefpunkt

c) $f''(x) = x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

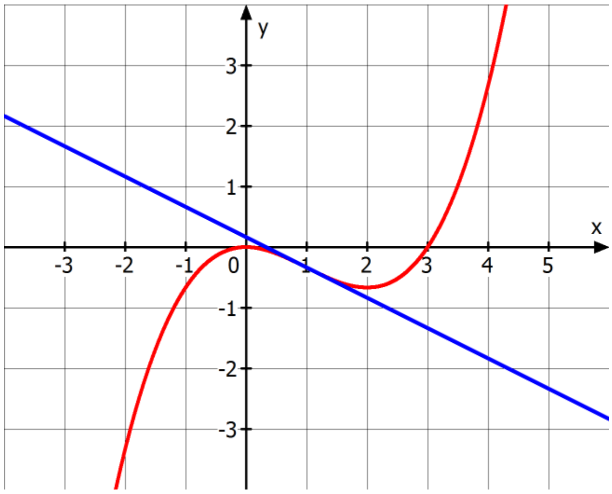
x	$-\infty < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f''(x)$	$-$	$*$
	RK	LK

$W\left(1 \mid -\frac{1}{3}\right)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f.

c) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

Wendetangente: $y = (x-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

d) $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{24}$



---

2. Gegeben: $f(x) = \frac{2x-3}{4x}$

$f'(x) = \frac{2 \cdot 4x - (2x-3) \cdot 4}{16x^2} = \frac{8x - 8x + 12}{16x^2} = \frac{3}{8x^2} = 3x^{-2} \Rightarrow f''(x) = -6x^{-3}$

x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
f ''(x)	+	–
	LK	RK

---

3. Gegeben: $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

a) $f'(x) = \frac{4e^x \cdot (e^x + 1) - 4e^x \cdot e^x}{4e^x \cdot (e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

$f''(x) = \frac{4e^x \cdot (e^x + 1)^2 - 4e^x \cdot 2 \cdot (e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x \cdot (e^x + 1) - 4e^x \cdot 2 \cdot e^x}{(e^x + 1)^3} = \frac{4e^x \cdot (1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

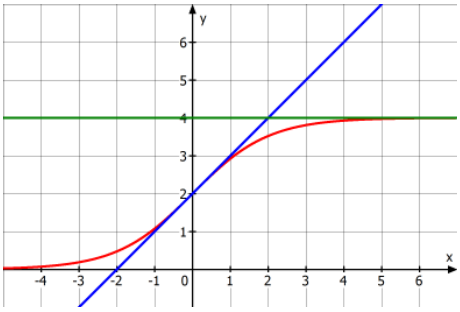
x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
f ''(x)	+	–
	LK	RK

$W(0 \mid 2)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von f.

$f'(0) = 1$

Wendetangente: $y = 1 \cdot x + 2 = x + 2$

b)



c) $\int_0^2 [(x+2) - \frac{4e^x}{e^x+1})dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - 4 \cdot \ln(e^x+1)\right]_0^2 = 6 - 4 \cdot \ln(e^2+1) + 4 \cdot \ln 2$

$\int_2^a (4 - \frac{4e^x}{e^x+1})dx = \left[4x - 4 \cdot \ln(e^x+1)dx\right]_2^a = 4a - 4 \cdot \ln(e^a+1) - 8 + 4 \cdot \ln(e^2+1)$

$\Rightarrow \quad A(a) = 4 \cdot \ln 2 \; - \; 2 + 4a - 4 \cdot \ln(e^a+1)$

$4a - 4 \cdot \ln(e^a+1) = 4 \cdot \ln e^a - 4 \cdot \ln(e^a+1) = 4 \cdot \ln \frac{e^a}{e^a+1} \qquad \lim_{a \to \infty} 4 \cdot \ln \frac{e^a}{e^a+1} = 0$

$\lim_{a \to \infty} A(a) = 2 \cdot \ln \; - \; 2$

4.

	$-\infty < x \leq 3$	$3 \leq x \; < \; \infty$
F	smf	sms

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 2$	$3 < x < \infty$
F	LK	RK	LK

Extremstellen: $x = 3$ Wendestellen: $x = 0 \quad x = 2$

Lösung Stochastik

1. $E = \left\{ \text{ZZZKK, KZZZK, KKZZZ, ZZZZK, ZZZKZ, ZKZZZ, KZZZZ, ZZZZZ} \right\}$

$P(E) = \frac{8}{2^5} = \frac{1}{4}$

----

2. $\left[\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{2}\right]:2 = 120$

Erläuterung:

Mädchen: a, b, c , d

Jungen: A, B, C, D, E, F

Erste Mannschaft a, A, B, C, D ergibt zweite Mannschaft b, c, d, E, F

Erste Mannschaft b, c, d, E, F ergibt zweite Mannschaft a, A, B, C, D

also jeweil die gleichen zwei Mannschaften $\rightarrow$ Division durch 2

----

3. a) $\binom{12}{4} = 495$ b) $\binom{8}{4} = 70$ c) $\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{2} = 168$

d) $\binom{8}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{2} = 462$

----

4. a) $P(A) = \dfrac{\overbrace{4}^{\text{Plätze für die Mädchengruppe}}\cdot\overbrace{3!}^{\text{Anordnung der Mädchen}}\cdot\overbrace{3!}^{\text{Anordnung der Jungen}}}{6!} = \dfrac{1}{5}$

b) $P(B) = \dfrac{\overbrace{3}^{\text{Mädchen links außen}}\cdot\overbrace{5!}^{\text{Aordnung der anderen}}}{6!} = \dfrac{1}{2}$

c) $P(C) = \dfrac{\overbrace{3!}^{\text{Anordnung der Jungen}}\cdot\overbrace{3!}^{\text{Anordnung der Mädchen}}\cdot\overbrace{2}^{\text{bunte Reihen}}}{6!} = \dfrac{1}{10}$

----

5. $P(E) = \dfrac{\overbrace{6}^{\text{Zahl, die zweimal gewürfelt wird}}\cdot\overbrace{\binom{7}{2}}^{\text{Platzwahl}}\cdot\overbrace{5!}^{\text{Anordnung der anderen Augenzahlen}}}{6^7} = 4{,}5\cdot10^{-2}\%$

----

6. a) $P(A) = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

b) $P(B) = \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

----

7. a) P(A) =

$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) $$P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

c) $$P(C) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Zufallsgrößen

1.

x	1	2	3
P(X = x)	$\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$	$\frac{6\cdot3\cdot5}{216} = \frac{5}{12}$	$\frac{6\cdot5\cdot4}{216} = \frac{5}{9}$

$$E(X) = \frac{91}{36}$$

---

2. a)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

r	−2	−1	0	1	2	3
P(R = r)	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) $E(R) = -\frac{1}{6}$ (€)

---

3. a) 0 : ZZZZZ

1 : WZZZZ, ZWZZZ, ZZWZZ, ZZZWZ, ZZZZW,
WZWZZ, WZZWZ, WZZZW, ZWZWZ, ZWZZW, ZZWZW
WZWZW

2 : WWZZZ, ZWWZZ, ZZWWZ, ZZZWW
WWZWZ, WWZZW, ZWWZW, WZZWW, ZWZWW, WZWWZ
WWZWW

3 : WWWZZ , ZWWWZ, ZZWWW,
WWWZW, WZWWW

4 : WWWWZ, ZWWWW

5: WWWWW

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) $E(X) = \frac{31}{16}$. Berta verliert im Mittel $\frac{1}{16}$ €

---

4. $E(X) = 0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8$

---

5. a)

	1	2	3	3	3
2	0,50	2	0,50	0,50	0,50
2	0,50	2	0,50	0,50	0,50
2	0,50	2	0,50	0,50	0,50
3	0	0,50	2	2	2
3	0	0,50	2	2	2
3	0	0,50	2	2	2

x	0	0,5	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

b) $E(R) = 0{,}05$

Es liegt kein faires Spiel vor.

Urnenexperimente

===

1. a) $P(A) = B(10; 0{,}2; 2) + B(10; 0{,}2; 3) = 50{,}3\%$

b) $P(B) = \dfrac{\binom{15}{2} \cdot \binom{60}{8} + \binom{15}{3} \cdot \binom{60}{7}}{\binom{75}{10}} = 53{,}6\%$

---

2. a) $P(A) = \dfrac{\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}} = 31{,}1\%$ b) $P(A) = \dfrac{\binom{45}{10} + \binom{5}{1} \cdot \binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} = 74{,}2\%$

c) $P(C) = 1 - P(A) = 25{,}8\%$

Binomialverteilung

---

1. a) $P(X = 13) = B(20;\ 0{,}6;\ 13) = \binom{20}{13} \cdot 0{,}6^{13} \cdot 0{,}4^{7} = 16{,}6\%$

$P(B) = 0{,}4 \cdot B(19;\ 0{,}6;\ 13) = 0{,}4 \cdot \binom{19}{13} \cdot 0{,}6^{13} \cdot 0{,}4^{6} = 5{,}8\%$

$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F^{20}_{0,6}(15) = 5{,}1\%$

$P(10 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 9) = F^{20}_{0,6}(12) - F^{20}_{0,6}(9) = 45{,}7\%$

$P(E) = B(20;\ 0{,}6;\ 16) = 3{,}5\%$

b) $P(12 - k \leq X \leq 1 + k) > 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad k = 4 \quad I = [8;\ 16]$

c) $n > \dfrac{\mathrm{lm}0{,}01}{\ln 0{,}4} \quad \Rightarrow \quad n = 5$
