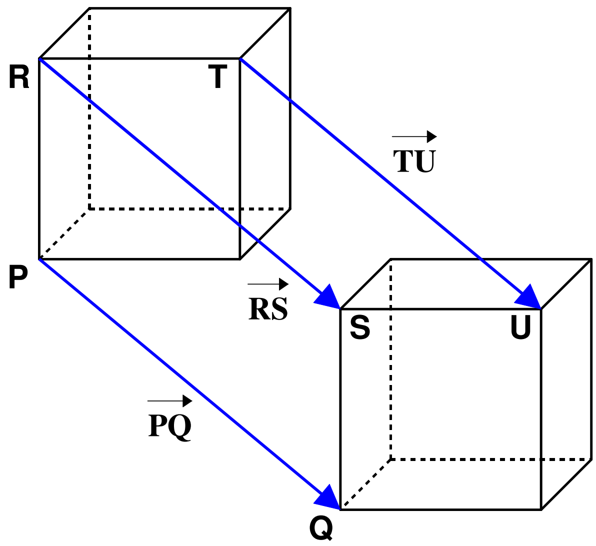
## 1 Punkte und Vektoren

==================================================================

Verschiebungen im Raum veranschaulicht man durch Pfeile, die von den Punkten zu den jeweiligen Bildpunkten gerichtet sind.




Eine Menge bestehend aus allen **parallelgleichen Pfeile** der Ebene oder des Raumes heißt ***Vektor*** $\vec{v}$.

Jeder einzelne Pfeil aus der Klasse heißt ***Repräsentant*** des Vektors.

**Beispiel** :

$\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ sind Repräsentanten des gleichen Vektors $\vec{v}$.

Man schreibt kurz, aber leider nicht ganz richtig $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{PQ}}$.

Sind $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ die Koordinatendarstellungen von P und Q in einem

kartesischen Koordinatensystem, dann nennt man $v_1 = q_1 - p_1$, $v_2 = q_2 - p_2$ und $v_3 = q_3 - p_3$ die ***Koordinaten*** von $\vec{v}$ und schreibt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ist $O\left(0 \mid 0 \mid 0\right)$ der Ursprung des Koordinatensystems und $P\left(p_1 \mid p_2 \mid p_3\right)$ ein Punkt, dann nennt man den Pfeil $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ den ***Ortsvektor*** des Punkte P und schreibt

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}$$

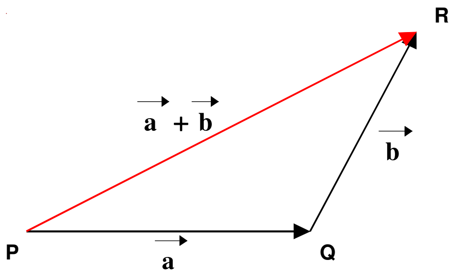
---

## 2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Die Addition zweier Vektoren erfolgt nach der Vorschrift

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}}$$

und ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.




Für die Koordinaten gilt

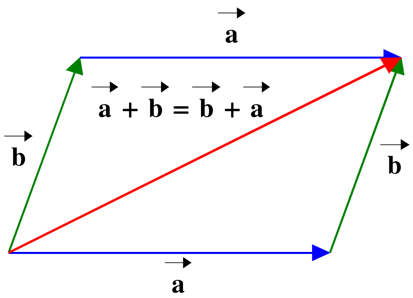
$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}}$$

**Gesetze der Vektoraddition** :

---

**Kommutativgesetz**

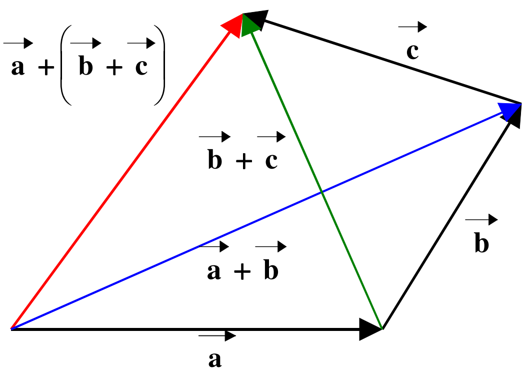
$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$




---

**Assoziativgesetz**

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$




$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$

---

**Nullvektor**
Der Vektor

$$\vec{\mathbf{o}} = \overrightarrow{\mathbf{PP}}$$

ist ein Vektor, dessen Repräsentanten den Betrag (Länge) Null haben und keine Richtung besitzen. Es gilt

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{o}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}}$$

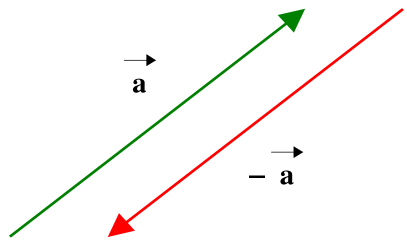
In Koordinatenschreibweise gilt

$$\boxed{\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

---

**Gegenvektor**

Der Vektor, dessen Repräsentanten die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung wie die des Vektors $\vec{a}$ besitzen, heißt dessen **Gegenvektor** $-\vec{a}$. Also




$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \Leftrightarrow -\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{QP}}}$$

Es gilt :

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} + \overrightarrow{\mathbf{QP}} = \overrightarrow{\mathbf{PP}} = \vec{\mathbf{o}}}$$

In Koordinatenschreibweise gilt

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}}$$

Man subtrahiert den Vektor $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$, indem man den ***Gegenvektor*** $-\vec{b}$ addiert.

In Koordinatenschreibweise

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}}$$

Folgerung:

Sind $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ die Ortsvektoren der Punkte A und B, dann gilt

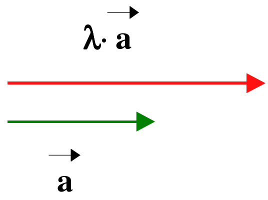
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}}$$

---

## 3 Die S-Multiplikation von Vektoren

Unter dem $\lambda$-fachen ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) eines Vektors $\vec{a}$ i. Z.

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$$




versteht man den Vektor, dessen Repräsentanten den $\lambda$-fache Länge und die gleiche Richtung wie die Repräsentanten von $\vec{a}$ haben.

Speziell gilt dann :

$$\boxed{\mathbf{1 \cdot \vec{a} = \vec{a}}}$$

Weiter definiert man :

$$\boxed{\mathbf{0 \cdot \vec{a} = \vec{o}}}$$

$$\boxed{\mathbf{(-\lambda) \cdot \vec{a} = -(\lambda \cdot \vec{a})}}$$

Da man richtungslose Größen auch Skalare nennt, bezeichnet man die so definierte Multiplikation mit reellen Zahlen als ***S(kalar)-Multiplikation***.

In Koordinatenschreibweise

$$\boxed{\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}}$$

**Gesetze der S-Multiplikation**

**Distributivgesetz für Vektoren**: $\boxed{\mathbf{\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}}}$

**Distributivgesetz für Skalare**: $\boxed{\mathbf{(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}}}$

**C Assoziativgesetz**: $\boxed{\mathbf{(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})}}$

## 4 Der Betrag eines Vektors

---

Unter dem Betrag $\left|\vec{a}\right|$ eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge eines seiner Repräsentanten.

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ eine Koordinatendarstellung, dann gilt

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}} \text{ bzw. } \boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

---

Anwendung : Die Länge einer Strecke

Sind $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ die Ortsvektoren der Punkte

$A\left(a_1 \mid a_2\right)$ und $B\left(b_1 \mid b_2\right)$ bzw. $A\left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)$ und $B\left(b_1 \mid b_2 \mid b_3\right)$,

dann gilt für die Länge der Strecke $\left[AB\right]$

$$\boxed{\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b - a_2)^2}}$$

bzw.

$$\boxed{\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b - a_2)^2 + (b_3 - a_2)^2}}$$

---

## 6 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

==================================================================

Unter dem Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den nichtstumpfen Winkel, den zwei Repräsentanten dieser Vektoren mit gemeinsamen Anfangspunkt miteinander einschließen.

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren, dann heißt

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}$$

das ***Skalarprodukt*** der beiden Vektoren.

Speziell ist $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$

Besitzen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Koordinatendarstellungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2} \text{ bzw. } \boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$$

Anwendungen :

1. Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dann gilt für den Winkel φ, den sie miteinander einschließen

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \text{ bzw. } \boxed{\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

2. Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

3. Ist $\vec{a} \neq \vec{o}$ ein Vektor mit dem Betrag $a = |\vec{a}|$, dann heißt der Vektor $\vec{a_0} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a}$ der zu $\vec{a}$ gehörende Einheitsvektor. Er hat die Länge 1.

In Koordinatenschreibweise

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}$$

---

## 7 Das Vektorprodukt

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, dann nennt man den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dabei gilt

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal.

2. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm auf, dann ist

$$\boxed{\mathfrak{A} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}$$

gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms.

Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Dreieck auf, dann ist

$$\boxed{\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}$$

gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks.

Spannen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Spat auf, dann ist

$$\boxed{\mathfrak{V} = \left| \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right|}$$

gleich dem Rauminhalt des Spats.

Spannen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Tetraeder auf, dann ist

$$\boxed{\mathfrak{V} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right|}$$

gleich dem Rauminhalt des Tetraeders.

# 8 Kreise und Kugel und Kugeln im Koordinatensystem

===================================================================

***Kreis- und Kugelgleichung in Vektor- und Koordinatenschreibweise***

Ein Punkt $X\left(x_1 \mid x_2\right)$ der Ebene liegt genau dann auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(m_1 \mid m_2\right)$ und dem Radius r, wenn

$$\boxed{\left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{M}\right)^2 = r^2}$$

ist.

In Koordinaten ergibt sich

$$\boxed{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2}$$

Ein Punkt $X\left(x_1 \mid x_2 \mid x_3\right)$ des Raumes liegt genau dann auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt

$M\left(m_1 \mid m_2 \mid m_3\right)$ und dem Radius r, wenn

$$\boxed{\left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{M}\right)^2 = r^2}$$

ist.

In Koordinaten ergibt sich

$$\boxed{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}$$

---