Lösungen zum Übungsblatt Kettenregel (ohne Gewähr)

==

1. a) $f(x) = (x+1)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\cdot(x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$W\left(-1 \mid 0\right)$ ist Terrassenpunkt, da $f'(x) > 0$ für $x \neq -1$

b) $f(x) = (2x-3)^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4\cdot(2x-3)^3\cdot 2 = 8\cdot(2x-3)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5$

	$-\infty < x < 1{,}5$	$1{,}5 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

$T\left(1{,}5 \mid 0\right)$ ist ein Tiefpunkt.

c) $f(x) = 6\cdot(\frac{1}{2}x-1)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 18\cdot(\frac{1}{2}x-1)^2\cdot\frac{1}{2} = 9\cdot(\frac{1}{2}x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$W\left(2 \mid 0\right)$ ist Terrassenpunkt, da $f'(x) > 0$ für $x \neq 2$

---

3. a) $f(x) = \sqrt{4x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}}\cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$

$f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$

Tangente: $y = 2\cdot(x-0)+1 = 2x+1$

Normale: $y = -\frac{1}{2}(x-0)+1 = -\frac{1}{2}x+1$

b) $f(x) = \sqrt{1-2x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}\cdot(-4x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

$f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$

Tangente: $y = 1$

Normale: $x = 0$

---

4. a) $f(x) = \frac{1}{4}\sin(\frac{1}{2}x-a) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}\cos(\frac{1}{2}x-a)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\cos(\frac{1}{2}x-a)$

b) $f(x) = 2\cdot\cos(\frac{\pi}{3}-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-x)\cdot(-1) = 2\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

---

5. a) $f(x) = x\cdot\sqrt{2x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1\cdot\sqrt{2x-1} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2 = \sqrt{2x-1} + \frac{x}{\sqrt{2x-1}} =$

$$= \frac{2x-1+x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot(x-1)^3} =$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)\cdot(x-1)}}$$

c) $f(x) = (1+\sqrt{2x+1})^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\cdot(1+\sqrt{2x+1})^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot 2 = \frac{3\cdot(1+\sqrt{2x+1})^3}{\sqrt{2x+1}}$

d) $f(x) = \frac{a}{(ax+1)^4} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{0\cdot(ax+1)^4 - a\cdot 4\cdot(ax+1)^3\cdot a}{(ax+1)^8} = \frac{-4a^2\cdot(ax+1)^3}{(ax+1)^8} =$

$$= \frac{-4a^2}{(ax+1)^5}$$

e) $f(x) = \frac{x^2}{(4x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x\cdot(4x+1)^2 - x^2\cdot 2\cdot(4x+1)\cdot 4}{(4x+1)^4} = \frac{2x\cdot(4x+1)-8x^2}{(4x+1)^3} =$

$$= \frac{2x}{(4x+1)^3}$$

Analytische Geometrie
==

1. Gegeben: $A\left(1 \mid -3 \mid -2\right)$ und $B\left(7 \mid -1 \mid 7\right)$

Ansatz: $M\left(0 \mid 0 \mid m\right)$

Bedingung:

$$\overline{AM} = \overline{BM} \quad \Rightarrow \quad (0-1)^2+(0+3)^2+(m+2)^2 = (0-7)^2+(0+1)^2+(m-7)^2$$

$$\Rightarrow \quad m = 4\frac{13}{18}$$

----

2. Gegeben: $A\left(-2 \mid 8 \mid 0\right)$, $B\left(0 \mid 0 \mid -2\right)$, $C\left(1 \mid 2 \mid 0\right)$ und $D\left(0 \mid 6 \mid 1\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{C} - \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AD} = 3$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BC} = 3$

Da $\overrightarrow{AD} \nparallel \overrightarrow{BC}$, ist ABCD ein gleichschenliges Trapez.

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ und $\left|\overrightarrow{AD}\right| = 3$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 16 - 2 = 18$$

$$\cos\alpha = \frac{18}{6\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \vee \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$