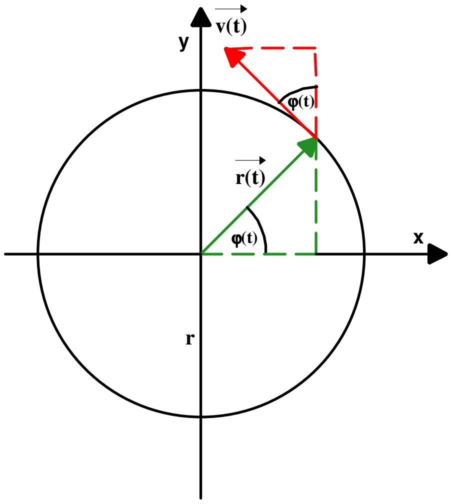
Die Kreisbewegung

===

1. Beschreibung der Kreisbewegung



Die Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn vom Radius r kann beschrieben werden durch

a) seinen Ortvektor $\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

b) durch den Winkel $\varphi(t)$ den der Ortvektor $\overrightarrow{r(t)}$ mit der positiven x-Achse bildet.

Der Winkel $\varphi(t)$ wird im Bogenmaß gemessen d. h. ist s der Bogen den der Winkel aus dem Kreis ausschneidet, dann ist

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}}$$

Eine Keisbewegung heißt **gleichförmig**, wenn vom Ortsvektor in der Zeit Δt überstrichene Winkel $\Delta\varphi$ proportional zu Δt ist. Der konstante Quotient

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

gibt dann an, welcher Winkel pro Sekunde überstrichen wird und heißt deshalb Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung.

Ist T die Umlaufsdauer d.h die Zeit die der Körper für eine Umdrehung benötigt, dann gilt

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Befindet sich der Körper zur Zeit $t = 0$ auf der positiven x-Achse des Koordinatensystems d. h., $\varphi(0s) = 0$, dann schließt der Ortsvektor zur Zeit t den Winkel

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(t) = \omega \cdot t}}$$

Ist $\varphi(0s) = \varphi_0$, dann ist

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0}}$$

Beachte :

$$\left[\omega\right] = \frac{1(\mathrm{rad})}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} \text{ mit } 1 \text{ rad} = \frac{1}{\pi} \cdot 180°$$

Technisch beschreibt man gleichförmige Kreisbewegungen durch Angabe der **Frequenz f.** Sie gibt an, wie viele Umdrehungen der Körper pro Sekunde ausführt.

Es ist daher

$$\mathbf{f = \frac{1}{T}} \text{ und } \boxed{\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot f}}$$

Folgerungen :

a) Für den Ortsvektor einer gleichförmigen Kreisbewegung mit $\varphi(0s) = 0$ gilt

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{r(t)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r \cdot \cos\varphi(t)} \\ \mathbf{r \cdot \sin\varphi(t)} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathbf{r(t)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r \cdot \cos(\omega t)} \\ \mathbf{r \cdot \sin(\omega t)} \end{pmatrix}}$$

b) In der Zeit T legt der Körper den Umfang U des Kreises zurück. Also gilt für die Bahnge schwindigkeit v

$$\boxed{\mathbf{v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \omega \cdot r = const.}}$$

d.h., die gleichförmige Kreisbewegung ist eine Bewegung bei der sich Richtung der Geschwindigkeit, nicht jedoch ihr Betrag ändert.

Für den Geschwindigkeitsvektor gilt dann

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{v(t)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\,\omega r \cdot \sin\varphi(t)} \\ \mathbf{\omega r \cdot \cos(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\,\omega r \cdot \sin(\omega t)} \\ \mathbf{\omega r \cdot \cos(\omega t)} \end{pmatrix}}$$

---

2. Die Zentripetalkraft

Damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegt, muss in jedem Punkt der Bahn eine konstante Kraft zum Kreismittelpunkt hin wirken.

Diese Kraft heißt **Zentripetalkraft** $\vec{F_r}$ und die von ihr hervorgerufene Beschleunigung **Zentripetalbeschleunigung** $\vec{a_r}$.

Ergebnis :

Bewegt sich ein Körper mit der Bahngeschwindigkeit v bzw. der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn vom Radius r, dann muss er zum Mittelpunkt der Kreisbahn hin beschleunigt werden. Für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung gilt

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

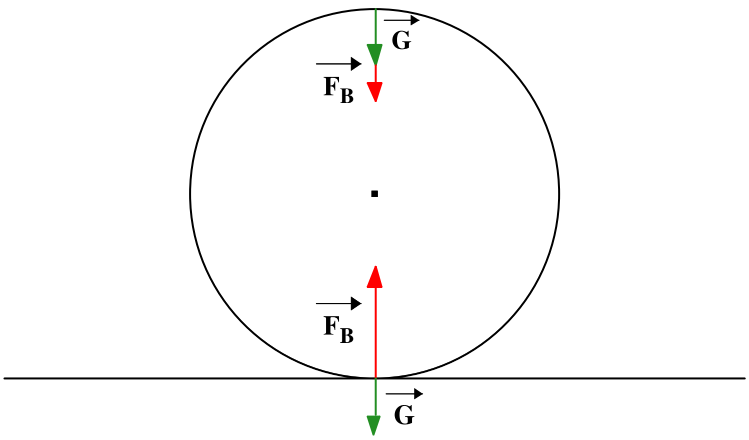
Die diese Beschleunigung notwendige Zentripetalkraft ist ebenfalls zum Mittelpunkt hin gerichtet und hat den Betrag

$$\boxed{F_r = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r}$$

Anwendungen

===

1. ***Looping***



Ein 300 kg schwerer Wagen Wagen fährt mit $v = 90\ \frac{km}{h}$ in einen kreisförmigen Looping vom Radius $r = 10$ m.

a) Mit welcher Kraft drückt der Wagen im Punkt A gegen den Boden?

a) Berechne die Geschwindigkeit des Wagens im höchsten Punkt A der Bahn.

b) Wie groß ist die Kraft, mit der der Wagen in A gegen die Schienen gedrückT wird?

a) $F_A - G = F_r \quad \Rightarrow \quad F_A = F_r + G$

$$F_A = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot (g + \frac{v^2}{r}) \quad F_A = 300\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{625\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{10\ \text{m}}) = 21{,}7\ \text{kN}$$

b) $\frac{1}{2} m \cdot v_A{}^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_B{}^2 + mg \cdot 2r \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\cdot v_A{}^2 - 4g \cdot r}$

$$v_A = \sqrt{625\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 4 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{m}} = 15{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) $F_B + G = F_r \quad \Rightarrow \quad F_b = F_r - G$

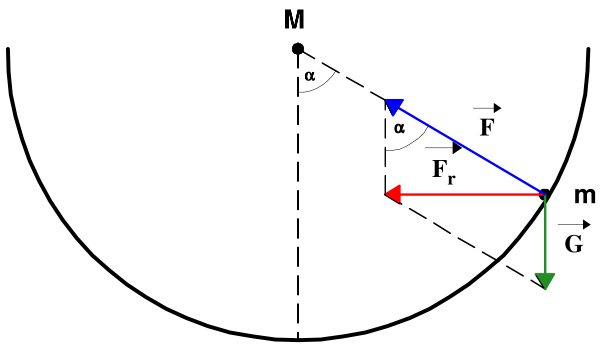
$$F_B = m \cdot \frac{v^2}{r} - m \cdot g = m \cdot (\frac{v^2}{r} - g) \quad F_b = 300\ \text{kg} \cdot \left(\frac{(15{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{10\ \text{m}} - 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 4{,}1\ \text{kN}$$

d) $F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \frac{v_B{}^2}{r} = mg \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{g \cdot r} \quad v_B = \sqrt{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{m}} = 9{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$v_A = \sqrt{v_B{}^2 + 4g \cdot r} \quad v_A = \sqrt{(9{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 4 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10\ \text{m}} = 22{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

---

2. ***Kugel in der rotierenden Halbkreisrinne***



Die auf die Kugel wirkende Gewichtskraft $\vec{G}$ und die von der Bahn stammende Kraft $\vec{F}$ ergeben die Zentripetalkraft.

Es gilt dann $\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{m\cdot g} = \frac{\omega^2\cdot R\cdot\sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{R\cdot\omega^2} = \frac{g}{R\cdot 4\pi^2\cdot f^2}$

R = 1 m

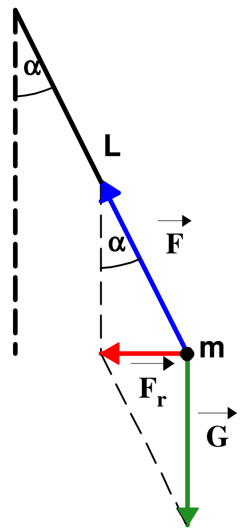
f (Hz)	1	2	3	5	10
α	75°	86°	88°	89°	89,9°

----

3. ***Das konische Pendel - Kettenkarussel***

Die auf die Kugel wirkende Gewichtskraft $\vec{G}$ und die vom Faden stammende Zugkraft $\vec{F}$ ergeben die Zentripetalkraft.

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{m\cdot g} = \frac{\omega^2\cdot L\cdot\sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{L\cdot\omega^2} = \frac{g}{R\cdot 4\pi^2\cdot f^2}$$



----

4. ***Rotierende Füssigkeitsoberfläche***

Für ein Teilchen im Abstand r von der Drehachse ergibt sich aus dem Kräftedreieck

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{m\cdot g} = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$$

Ist die Oberflächenkurve der Graph der Funktion $f : r \rightarrow f(r)$ gegeben durch dann ist

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2\cdot r}{g} = f'(r)$$

Damit gilt $f(r) = \frac{m\cdot\omega^2}{m\cdot g}\cdot\frac{r^2}{2} + C$ d.h. die Flüssigkeitsoberfläche ist ein Paraboloid.

----

5. ***Kurvenfahrt eines Pkw ohne Straßenüberhöhung***

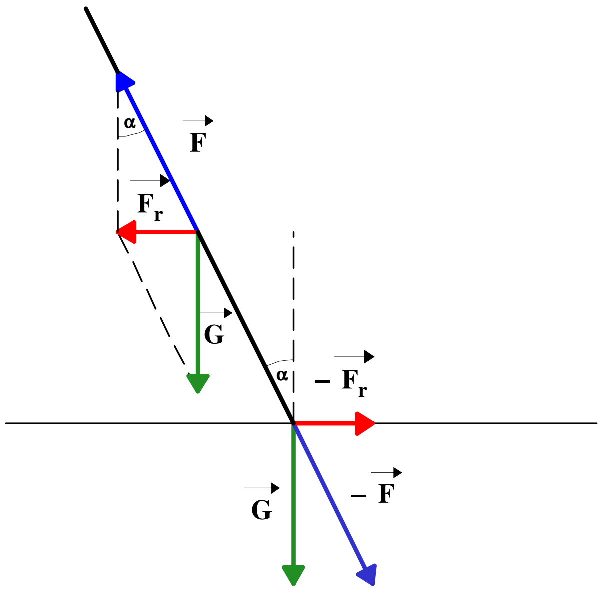
Damit die Kurve sicher durchfahren eerden kann muss gelten

$$F_r \leq F_R = \mu_H\cdot m\cdot g$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_H

---

5. ***Neigung eines Zweirads in der Kurve***



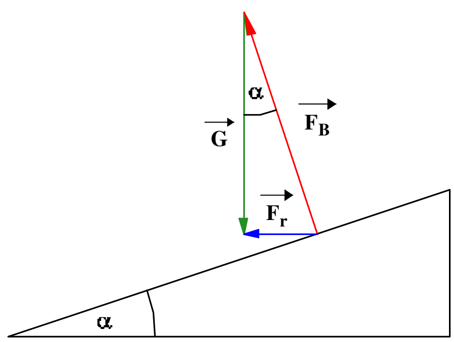
Um ein Kippen zu vermeiden muss sich ein Zweiradfahrer in Kurve neigen. Die Gewichtskraft $\vec{G}$ und die vom Boden stammende Kraft $\vec{F}$ ergeben die Zentripetalkraft.

Die Zentripetalkraft darf wieder nicht größer als die Haftreibungskraft sein.

Es ist $\tan\alpha = \dfrac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{g} = \dfrac{m \cdot v^2}{g \cdot r}$

---

6. ***Kurvenfahrt eines PKW mit Straßenüberhöhung***



Es gilt $\tan\alpha = \dfrac{F_r}{G} = \dfrac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} = \dfrac{v^2}{g \cdot r}$

4. ***Rotierende Füssigkeitsoberfläche***

Für ein Teilchen im Abstand r von der Drehachse ergibt sich aus dem Kräftedreieck

$$\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{m\cdot g} = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$$

Ist die Oberflächenkurve der Graph der Funktion $f : r \to f(r)$ gegeben durch dann ist

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2\cdot r}{g} = f\,'(r)$$

Damit gilt $f(r) = \frac{m\cdot\omega^2}{m\cdot g}\cdot\frac{r^2}{2} + C$ d.h. die Flüssigkeitsoberfläche ist ein Paraboloid.
