II. Algebra

2.1 Potenzen und Wurzeln

Es ist

$$\boxed{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sowie $\boxed{a^1 = a}$ und $\boxed{a^0 := 1}$ für $a \neq 0$.

$$\boxed{a^{-n} := \frac{1}{a^n}} \text{ mit } a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und, } n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ und } (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)} = \frac{1}{81}$$

Ist $\sqrt{a}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ die nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ist, dann ist die Definition

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a}}$$

sinnvoll.

Ist $\sqrt[n]{a}$ mit $a \in \mathbb{R}_+^0$ und $n \in \mathbb{N}$ die nichtnegative Zahl, deren n.te Potenz gleich a ist,

dann definiert man

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}}$$

Beispiel 2:

Ein Würfel mit dem Volumen $V = 2\ m^3$ hat die Kantenlänge $\sqrt[3]{2}\ m = 1{,}25992104..\ m$

Für m, n ∈ ℕ und a > 0 bzw. a ≥ 0 definiert man

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}} \text{ bzw. } \boxed{a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right)^m}$$

Beispiele:

a) $\sqrt[5]{32} = 2$ weil 2^5 0 32

b) $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} = 1{,}1892.....$ ist ein irrationale Zahl

c) $64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Potenzgesetze

Für r, s ∈ ℚ und a, b ∈ ℝ und a, b > 0 bzw. a, b ≥ 0

1. Potenzgesetz

$$\boxed{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$$

2. Potenzgesetz

$$\boxed{a^r : \cdot a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}}$$

3. Potenzgesetz

$$\boxed{(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r}$$

4. Potenzgesetz

$$\boxed{(a : b)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}}$$

5. Potenzgesetz

$$\boxed{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$$

Speziell für Quadratwurzeln gilt

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}} \text{ und } \boxed{\sqrt{a} : \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}} = (a : b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$\boxed{\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}} \text{ für } a,b \geq 0$$

2.2 Rationale Terme

Das Produkt aus einer Zahl mit Potenzen einer oder mehrerer Variablen mit natürlichen Exponenten nennt man ein rationales **Monom**.

Der Zahlenfaktor heißt Koeffizient des Monoms.

Beispiele:

Die Terme $2ab^2$, $x = 1 \cdot x$ und $\frac{1}{2}x^2$ sind Monome.

Zwei Monome heißen gleichartig, wenn sie sich lediglich in ihren Koeffizienten unterscheiden.

Die Summe bzw. Differenz gleichartiger Monome ist ein Monom. Das folgt aus dem Distributivgesetz.

$$\boxed{ac + bc = (a + b) \cdot c}$$

Das Produkt zweier Monome ist ein Monom. Das zeigt man mit dem Kommutativ- und Assoziativgesetz.

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a} \text{ bzw. } \boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

Beispiele:

a) $2ab^2 + 3ab^2 = 2 \cdot ab^2 + 3 \cdot ab^2 = (2 + 3) \cdot ab^2 = 5ab^2$

b) $-3x^3 + x^3 = -3 \cdot x^3 + 1 \cdot x^3 = (-3 + 1) \cdot x^3 = -2x^3$

c) $x^2 + x^3$ lässt sich nicht in ein Monom verwandeln

d) $(-2ab^2) \cdot 3ab = -6a^2b^3$

Eine Summe von Monomen nennt man ein Polynom mit einer oder mehreren Variablen.

Die Summe und das Produkt zweier Polynome ist wieder ein Polynom. Das zeigt man mit dem Distributivgesetz.

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac} \text{ bzw. } \boxed{(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \; 0 \; ac + ad + bc + bd}$$

Beispiele:

$p(x) = 2x^3 + x + 1$ und $q(x) = -3x + 2$ sind Polynome mit der Variablen x.

Es gilt

$$p(x) + q(x) = (2x^2 + x + 1) + (-3x + 2) = 2x^2 - 2x + 3$$

und

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 + x + 1) \cdot (-3x + 2) = -6x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 2x - 3x + 2 = -6x^3 + x^2 - x + 2$$

3.3 Binomische Formeln

Für das Quadrat einer Summe bzw. Differenz gilt

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \text{ und } \boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Das Monom 2ab wird als doppeltes Produkt bezeichnet.

Ferner gilt

$$\boxed{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$$

3.4 Gebrochen rationale Terme

Den Quotienten zweier rationaler Terme schreibt man i.a. in Bruchform und nennt ihn einen gebrochen rationalen Term oder kurz Bruchterm.

Für Bruchterme lässt sich Analogie zum Rechnen in Q das Erweitern und Kürzen definieren.

Für Bruchterme definiert lassen sich Analogie zum Rechnen in $\mathbb{Q}$ Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so definieren, dass das jeweilige Ergebnis wieder ein Bruchterm ist.

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

Haben die Bruchterme unterschiedliche Nenner; dann erweitert man diese auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner.

Übungsaufgaben

---

1. Fasse zusammen

a) $\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}$ b) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-4}$ c) $\frac{1}{x}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{x}{x-1}$ d) $1-\frac{1}{x+1}$

---

2. Fasse zusammen

a) $\frac{2x+1}{2x}-\frac{x^2+1}{x^2}$ b) $\frac{x+1}{2x^2-4x}-\frac{1-x}{4x}$

---

3. Vereinfache

a) $\frac{2x-2}{x^2+x}:\frac{x-1}{4x}$ c) $\frac{x}{2x+2}\cdot\frac{1-x}{x^2+2x}-\frac{1}{x}$

---

4. Vereinfache

a) $x^{-2}\cdot x^3\cdot x^4$ b) $(-x)^2\cdot(-x)^3\cdot x^{-4}$ c) $\frac{x^2\cdot x^{-3}}{x^4}$ d) $\frac{x^4}{x^2\cdot x^{-3}}$

e) $(-2x)^3$ f) $27x^2 : (9x^{-1})$ g) $\left(-\frac{3}{x}\right)^2$ h) $(-4x^2)^4$

i) $\frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-2}$ j) $(a-b)\cdot(b-a)^{-3}$ k) $x + x^{-1}$ l) $1 + (x-1)^{-1}$

Testaufgaben

---

1. Schreiben Sie jeweils als einen (gegebenenfalls vereinfachten) Bruch.

a) $2x : \frac{4}{x}$ b) $2x + \frac{4}{x}$

---

2. Gegeben ist der Term $T(a; b) = \frac{a+b}{a-b}$

a) Berechnen Sie den Wert des Terms für $(a; b) = (-2; 3)$.

b) Geben Sie ein Zahlenpaar (a; b) an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.

c) Geben Sie ein Zahlenpaar (a; b) an, das den Termwert 0 liefert.

---

3. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\sqrt{5^2 - 3^2}$ b) $\frac{6-\sqrt{8}}{2}$

---

4. Ein "Rechentrick" zum Quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:

Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.

a) Berechnen Sie nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 35.

b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$.

Berechnen Sie $(10x+5)^2$, formen Sie das Ergebnis geeignet um und begründen Sie dadurch den obigen "Rechentrick".

---

3. Vereinfachen Sie die folgenden Terme jeweils so weit wie möglich.

a) $3\cdot x^3\cdot x^3$ b) $3\cdot x^3 + x^3$ c) $3\cdot\sqrt{x^{-3}}\cdot\sqrt{x^{-3}}$

---

4. Berechnen Sie den Wert folgender Terme

a) $27^{\frac{2}{3}}$ b) $2^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

---

5. Vereinfachen Sie die folgenden Terme jeweils so weit wie möglich.

a) $x^2 - x(x-4)$ b) $x + 5x^2 \cdot x^{-1}$ c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{9b^2 + 9}$