III. Funktionen und Gleichungen

3.1. Lineare Funktionen

Eine Funktion mit der Zuordnungvorschrift

$$\boxed{f : x \to y = mx + t} \text{ und } m , t \in \mathbb{R}$$

heißt lineare Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, welche die y-Achse im Punkt $S_y(0 \mid t)$ schneidet.

Sind $P(x_1 \mid y_1)$ und $Q(x_2 \mid y_2)$, dann gilt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(m \cdot x_2 + t) - (m \cdot x_1 + t)}{x_2 - x_1} = \frac{m_2 \cdot x_2 - m \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

d.h. m ist gleich der Steigung der Geraden. Es gilt

$m > 0$: Die Gerade steigt.

$m = 0$: Die Gerade verläuft waagrecht.

$m < 0$: Die Gerade fällt.

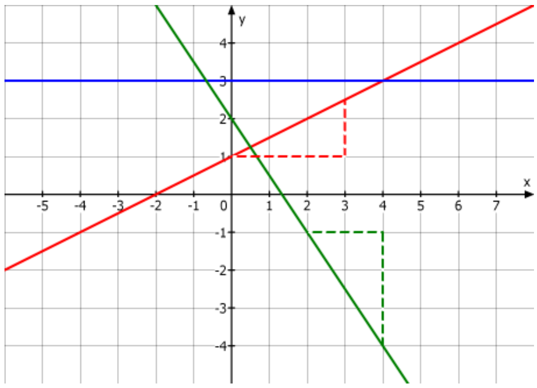
Man nennt deshalb $y = mx + t$ Geradengleichung mit der Steigung m und dem y-Abschnitt t.

Geraden senkrecht zur x-Achse und damit parallel zur y-Achse werden durch eine Gleichung der Form

$$\boxed{x = k}$$

mit einer konstanten Zahl k beschrieben. k ist die x-Koordinate aller Punkte auf der Geraden.

Beispiel:



Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

$f_1 : x \to 2x+1$, $f_2 : x \to y = -\frac{3}{2}x+2$ und $f_3 : x \to y = 3$

mit Steigungsdreiecken.

Übungsaufgaben

---

1. Bestimme die Schnittpunkte der Funktion $f : x \to y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ mit den Koordinatenachsen und zeichne den Graphen von f in ein Koordinatensystem.

---

2. a) Zeichne die Graphen von $f : x \to y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ und $g : x \to y = -2{,}5x + 1$ in ein Koordinatensystem.

   b) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Graphen und überprüfe Dein Ergebnis durch Rechnung!

---

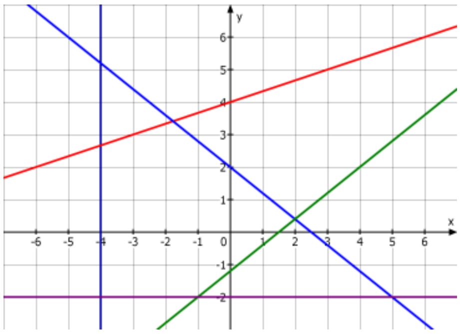
3. Gib die Zuordnungsvorschrift der linearen Funktion an, deren Graph parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(1 \mid 3)$ verläuft.

---

4. Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte $A(-1 \mid 4)$ und $B(3 \mid -8)$.

---

5. Bestimme die Gleichungen der eingezeichneten Geraden

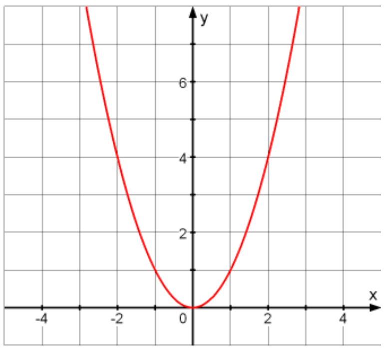


3.2 Quadratische Funktionen

Eine Funktion mit der Zuordnungvorschrift

$f : x \to y = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ und $a \neq 0$

heißt quadratische Funktion.



Eigenschaften der Quadratfunktion

1. Die Wertemenge ist die Menge der nichtnegativen Zahlen $W = \mathbb{R}_0^+$

2. Die Quadratfunktion ist für $x \leq 0$ streng monoton fallend und für $x \geq 0$ streng monoton steigend.

3. Der Graph der Quadratfunktion heißt Normalparabel. Die Normalparabel

   a) besitzt den Tiefpunkt $S\left(0; 0\right)$: Er heißt Scheitel der Parabel.

   b) ist symmetrisch zur y-Achse. Es ist $f(-x) = f(x)$ d.h. $(-x)^2 = x^2$.

Der Graph der Funktion

$f: x \to y = a \cdot x^2$ mit $a \neq 0$

geht aus der Normalparabel durch eine affine Streckung senkrecht zur x-Achse mit dem Streckungsfaktor a hervor. Auch dieser Graph wird als Parabel bezeichnet.

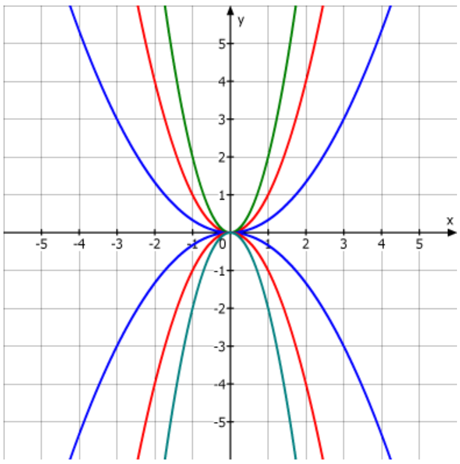
Für $a > 0$ erhält man nach oben geöffnete, für $a < 0$ nach unten geöffnete Parabeln.

Die Gleichung $y = ax^2$ heißt Gleichung der Parabel.

Bemerkung:

Bei einer affinen Streckung senkrecht zur x-Achse mit dem Streckungsfaktor a, wird die y-Koordinate eines Punktes mit a multipliziert, während die x-Koordinate unverändert bleibt.

Beispiel:



Die Graphen der Funktionen

$f_1: x \to x^2$ und $f_2: x \to y = 2x^2$ und $f_3: x \to y = \frac{1}{2}x^2$

sowie $f_4: x \to -x^2$ und $f_5: x \to y = -2x^2$ und $f_6: x \to y = -\frac{1}{2}x^2$

Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$f: x \to y = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$

heißt allgemeine quadratische Funktion. Ihr Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ lässt sich umformen zu

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c = a\cdot(x-s)^2 + t} \text{ mit } s = -\frac{b}{2a} \text{ und } t = c - \frac{b^2}{4a}$$

d.h. der Graph einer allgemeinen quadratischen Funktion ist eine Parabel mit dem Scheitel

$S\left(-\frac{b}{2a} \,|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$, die zur Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ kongruent ist.

Beispiele:

a) Der Graph der Funktion

$f: x \to y = (x+2)^2$

ist eine zur Normalparabel kongruente, nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(-2;\ 0)$.

b) Der Graph der Funktion

$f: x \to y = -(x-2)^2 + 1$

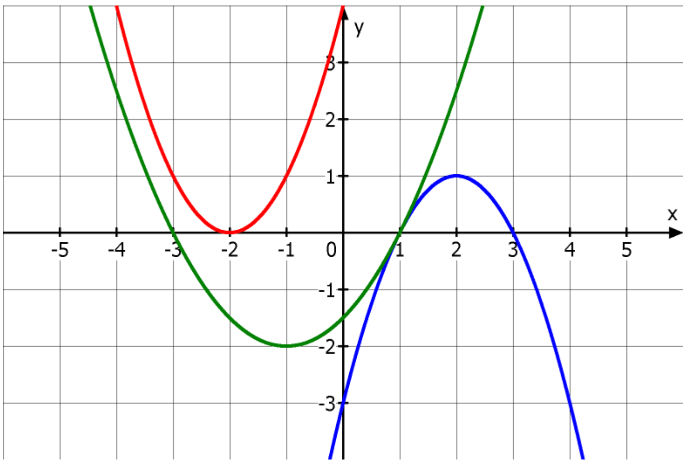
ist zur Normalparabel kongruent und hat den Scheitel $S(2;\ 1)$.

Die Parabel geht aus der Normalparabel durch eine Spiegelung an der x-Achse und durch eine anschließende Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben hervor.

c) Der Graph der Funktion

$f: x \to y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

ist zur Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ kongruent und hat den Scheitel $S(-1;\ -2)$.



Die Stellen, an denen der Graph einer Funktion f die x-Achse schneidet, heißen Nullstellen von f.

Die Nullstellen von f sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

Beispiel:

Die Funktion

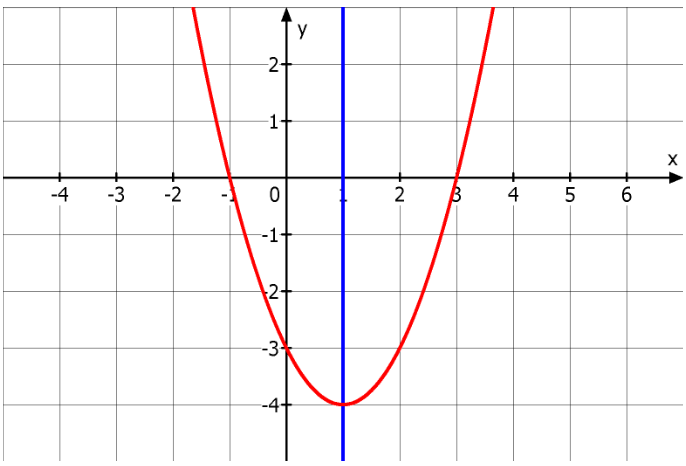
$f : x \rightarrow y = x^2 - 2x - 3$

hat die Nullstellen $x = -1$ und $x = 3$, denn die Gleichung

$x^2 - 2x - 3 = 0$

besitzt $x = -1$ und $x = 3$ als Lösungen.

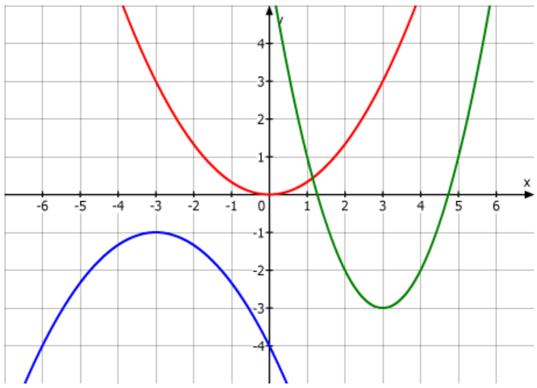
Die Symmetrieachse des Graphen hat die Gleichung $x = 1$.



Übungsaufgaben:

---

1. Bestimme die Gleichungen der Funktionen mit folgenden Graphen



---

2. Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow y = 2x^2 + 6x$ mit $D = \mathbb{R}$.

   Bestimme die Nullstellen von f und die Koordinaten des Scheitels ihres Graphen.

---

3. Gegeben ist die Funktion $f: x \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ mit $D = \mathbb{R}$ und dem Graphen G.

   Zeige, dass sich der Funktionsterm in der Form $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$ darstellen lässt und gib die Koordinaten des Scheitels von G an.

4.5 Gleichungen

4.5.1 Lineare Gleichungen

Hat man die Gleichung durch ***Äquivalenumformungen*** auf die Form $ax = b$ gebracht und ist $a \neq 0$, dann gilt

$$\boxed{x = \frac{b}{a}}$$

Im Fall $a = 0$ ergibt sich für

$b \neq 0$ die leere Menge

bzw. für

$b = 0$ die Grundmenge G als Lösungsmenge.

4.5.2 Bruchgleichungen

Eine Gleichung, die Bruchterme enthält heiß Bruchgleichung.

Die Definitionsmenge D einer Bruchgleichung ist die Grundmenge G mit Ausnahme der Zahlen, für die beim Einsetzen mindestens ein Nenner gleich 0 wird.

Um eine Bruchgleichung zu lösen, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller vorkommenden Nenner und führt die Bruchgleichung in eine lineare Gleichung über.

Beispiel 1:

Die Gleichung $\frac{2}{2x-3} = 4$ hat für $G = \mathbb{R}$ die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\}$.

Ihre Lösung erhält man durch

$$\frac{2}{2x-3} = 4 \;\Big|\; \cdot(2x-3) \;\Rightarrow\; 2 = 4\cdot(2x-3) \;\Rightarrow\; 2 = 8x-12 \;\Rightarrow\; 14 = 8x \;\Rightarrow\; x = \frac{7}{4}$$

Übungsaufgaben

---

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$

a) $\frac{2x}{x-1} = 3$ b) $\frac{4}{2x-3} = \frac{1}{x}$ c) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{x-3}$ d) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$

---

2. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$

a) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{2x-3}{x} - \frac{x-2}{x+2} = 1$ c) $\frac{2}{2x-1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} = 0$

4.5.3 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

heißt quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten.

Ihre Lösungen sind die Nullstellen der quadratischen Funktion $f : x \to y = ax^2 + bx + c$.

Der Term

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$

heißt Diskriminante (lat. discriminare unterscheiden) der quadratischen Gleichung. Es gilt

$\boxed{D > 0}$: Die Gleichung besitzt in $G = \mathbb{R}$ die Lösungen $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ und $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

$\boxed{D = 0}$: Die Gleichung besitzt in $G = \mathbb{R}$ die Lösung $x = -\frac{b}{2a}$.

$\boxed{D < 0}$:Die Gleichung besitzt keine Lösung.

4.5.4 Einfache Wurzelgleichungen

In einer Wurzelgleichung tritt Lösungsvariable mindestens einmal im Radikanden eines Wurzelterms auf.

Man isoliert die Wurzel und beseitigt die Wurzel durch beidseitiges Quadrieren. Da dies keine Äquivalenzumformung ist, muss man immer die Probe machen.

Beispiel:

Die Gleichung $\sqrt{x-1} = x - 3$ hat die Definitionsmenge $D = [1; \infty[$.

Beidseitiges Quadrieren gibt $x - 1 = (x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 7x + 10 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \vee x = 2$.

Aber nur $x = 5$ ist Lösung!

3.3. Gebrochen-rationale Funktionen

Eine Funktion $f: x \rightarrow y = \frac{p(x)}{q(x)}$

mit einem Polynom p(x) und einem nichtkonstanten Polynom q(x) heißt gebrochen-rationale Funktion,

wenn q(x) ein Polynom vom Grad 1 oder höher ist.

Die Definitionsmenge einer gebrochen-rationalen Funktion ist die Grundmenge G ($\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$) mit Ausnahme der Nullstellen des Nennerpolynoms q(x).

Diese Stellen heißen Definitionslücken.

Werden die Funktionswerte bei Annäherung an eine Definitionslücke x_0 beliebig groß bzw $y = 2$ klein, dann heißt die Gerade $x = x_0$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

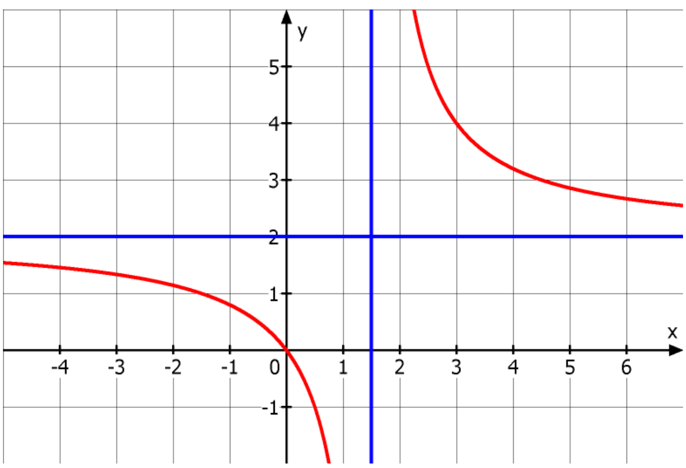
Nähern sich die Funktionswerte für beliebig groß bzw. klein werdene x-Werte einem konstanten Wert y_∞ an, dann heißt $y = y_\infty$ eine waagrechte Asymptote des Graphen von f.

Beispiel:

Die Funktion

$f: x \rightarrow y = \frac{4x}{2x-3}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{2}\}$

und besitzt die waagrechte Asymptote und die senkrechte Asymptote $x = \frac{3}{2}$



Testaufgaben

---

1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(1;\,3)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = -2x+5$ liegt.

   b) Geben Sie die Gleichung irgendeiner weiteren Geraden an, auf welcher der Punkt $P(1;\,3)$ liegt.

---

2. Bestimme die Lösung von $x^2+3x = 1$ in $G = \mathbb{R}$.

---

3. Bestimme die Lösung von $13 = 2-\frac{4}{x}$ in $G = \mathbb{R}$.

---

4. Bestimme die Lösung von $3x^2+5x-2 = 0$ in $G = \mathbb{R}$.

---

5. Bestimme die Lösung von $x-3 = \frac{4-3x}{x}$ in $G = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

---

6. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2-9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

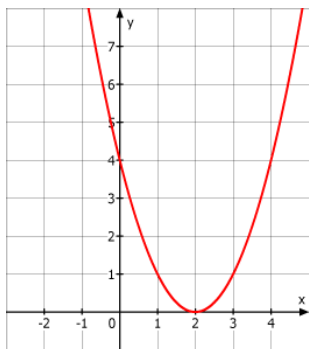
   Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

	r	f
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0\,\vert\,9)$	☐	☐
Der Punkt $(4\,\vert\,6)$ liegt auf dem Graphen.	☐	☐
Für $x \in\,]-3;\,3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse	☐	☐
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	☐	☐

---

7. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graph einer Funktion f mit $D = \mathbb{R}$.

   a) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Funktionsgleichungen zur Funktion f gehören kann.



☐ $y = x+4$ ☐ $y = x^2+4$ ☐ $y = x^2+2$ ☐ $y = (x-2)^2$ ☐ $y = (x+2)^2$

b) Lösen Sie näherungsweise mit Hilfe des Diagramms die Gleichung $f(x) = 2$.

---

8. Bei allen Funktionen dieser Aufgabe ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

a) Wie geht der Graph der Funktion $x \to x - 3)^2$ aus dem Graphen der Funktion $x \to x^2$ hervor?

Man verschiebt den Graphen der Funktion

☐ um 3 in Richtung der positiven y-Achse.

☐ um 3 in Richtung der negativen y-Achse.

☐ um 3 in Richtung der positiven x-Achse.

☐ um 3 in Richtung der negativen x-Achse.

b) Geben Sie an, wie der Graph der Funktion $x \to -x^2$ aus dem Graphen der Funktion $x \to x^2$ hervorgeht

---

9. Eine Parabel ist gegeben durch die Gleichung $y = -0{,}5x^2 - 2x - 6$. Marie hat mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen berechnet, dass die Parabel bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$ die x-Achse schneidet.

a) Bestätigen Sie Maries Ergebnisse durch ausführliches Rechnen.

b) Marie beginnt nun, den x-Wert des Scheitels der Parabel durch quadratische Ergänzung zu bestimmen. Ergänzen Sie sinnvoll, was ihr älterer Bruder dazu sagen könnte.

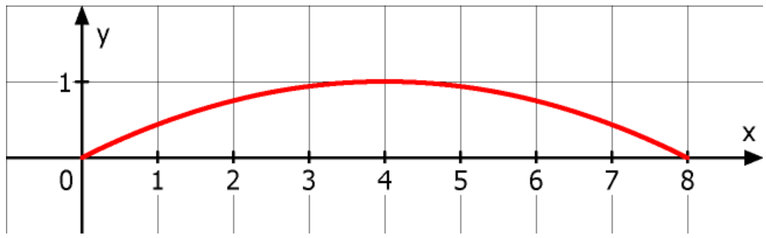
"Das geht hier einfacher. Wegen der Symmetrie der Parabel liegt der x-Wert des Scheitels ____, also bei x _____.

Leider lässt sich dieses Verfahren bei den Parabeln, die ________________________

____, nicht anwenden."

---

10. Simon möchte seinen Gartenteich mit einer Brücke überspannen, deren Auflagepunkte 8m voneinander entfernt sind. Dazu fertigt er eine Graphik an, die den Brückenbogen vereinfacht darstellt.



Der Brückenbogen wird durch eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beschrieben.

I $y = a\cdot(x^2 - 8)$ II $y = a\cdot x\cdot(x-4)$ III $y = a\cdot x\cdot(x-8)$

a) Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II zur Beschreibung des Brückenbogens infrage kommt.

b) Der Brückenbogen wird also durch eine Funktionsgleichung der Form III beschrieben. Berechnen Sie mithilfe der Graphik den passenden Wert von a.

c) Mit der Gleichung der Form III und dem passenden Wert für a berechnet Simon den y-Wert für $x = 6$.

Beschreiben Sie die Bedeutung dieses y-Werts im Sachzusammenhang.

---

11. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für die Funktion f bzw. g an, die die jeweils angegebene Eigenschaft haben soll.

Eine Definitionsmenge braucht nicht angegeben zu werden; es wird die für den jeweiligen Term maximal mögliche vorausgesetzt.

a) Die Funktion f hat genau die zwei Nullstellen 3 und 0. $f(x) =$ ....

b) Die Funktion g ist bei $x = 2$ nicht definiert. $g(x) =$ ....

---

12. a) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $x \to y = \frac{1}{x}$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ für $x > 0$ eingetragen.

Ergänzen Sie im Bereich $x < 0$ den noch fehlenden Teil des Graphen.

b) Tragen Sie in das obige Koordinatensystem den Graphen der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \to y = \frac{1}{5}x$ ein.

c) Bestimmen Sie rechnerisch, welche reellen Zahlen die Gleichung $\frac{1}{5}x = \frac{1}{x}$ lösen.

d) Erklären Sie die Bedeutung der Lösungen der Gleichung $\frac{1}{5}x = \frac{1}{x}$ für die beiden Graphen im obigen Koordinatensystem haben.

---

13. In Einsteins Relativitätstheorie spielt die Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ eine wichtige Rolle.

a) Die Definitionsmenge des Terms ist

☐ $[-1; 1]$ ☐ $]-1; 1[$ ☐ $[0; 1]$ ☐ $]-\infty; \infty[$

b) Bestätigen Sie durch ausführliche Rechnung, dass für $x = 0{,}6$ der Funktionswert $y = 1\frac{1}{4}$ ist.
