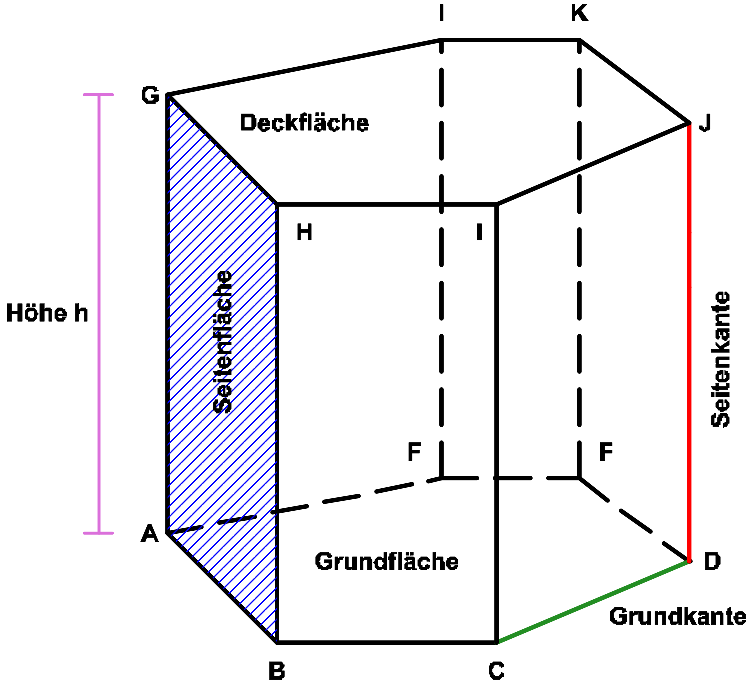
Das Prisma

==

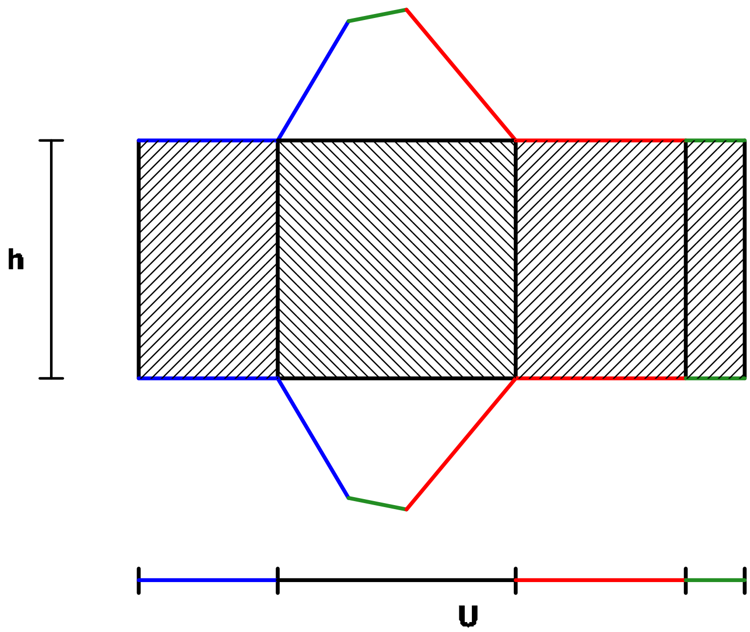


Sechsseitiges gerades Prisma

Wird ein Körper von n Rechtecken und zwei kongruenten und senkrecht übereinander liegenden n-Ecken begrenzt, dann heißt der Körper ein gerades n-seitiges ***Prisma***.

Die gemeinsame Länge aller Seitenkanten eines geraden Prismas heißt Höhe des Prismas.

Das Netz eines geraden Prismas



Hat die Grundfläche eines geraden Prismas mit der Höhe h den Flächeninhalt G und den Umfang U, dann gilt für den Oberflächeninhalt O des Prismas

$$\boxed{O = 2 \cdot G + U \cdot h}$$

Für den Rauminhalt des Prismas gilt

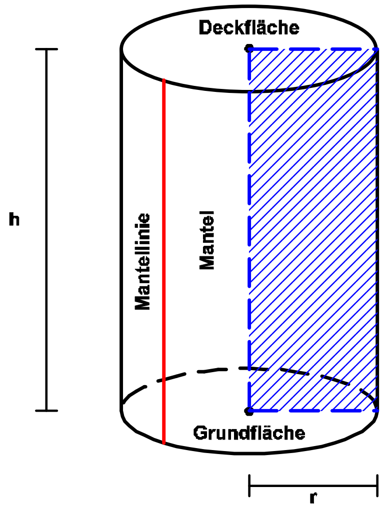
$$\boxed{V = G \cdot h}$$

Schiefe Prismen

Wird ein Körper von n Parallelogrammen und zwei kongruenten, parallel zueinander liegenden n-Ecken begrenzt, dann heißt der Körper ein schiefes n-seitiges Prisma.

Der Zylinder

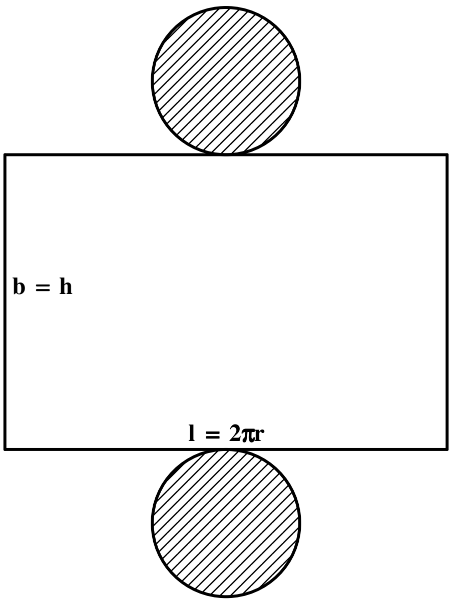
==



Den Rotationskörper, der entsteht, wenn sich ein Rechteck um eine seiner Seiten dreht, nennt man man geraden ***Zylinder***.

Ein gerader Zylinder besitzt zwei kongruente, senkrecht übereinander liegende Kreise als Grund- und Deckfläche. Ihr gegenseitiger Abstand heißt Höhe h des Zylinders und ihr Radius ist der Zylinderradius r.

Die seitliche Begrenzungsfläche eines Zylinders heißt ***Mantel*** des Zylinders. Rollt man den Mantel eines geraden Zylinders mit dem Radius r ab, dann erhält man ein Rechteck, dessen Länge gleich dem Umfang der Grundfläche und dessen Breite gleich der Höhe h des Zylinders ist.



Für den Inhalt M des Mantels bzw. den Oberflächeninhalt O eines geraden Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h gilt deshalb

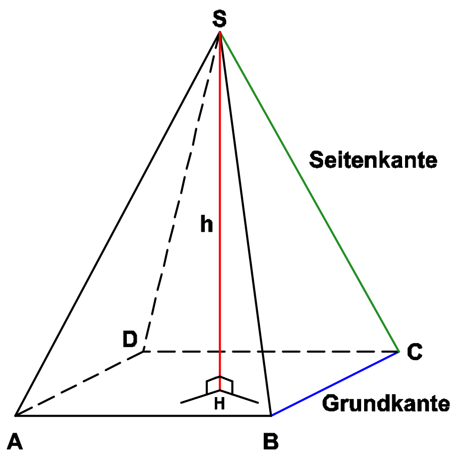
$$\boxed{M = 2\pi r\cdot h} \text{ bzw. } \boxed{O = 2\pi r\cdot h + 2\pi\cdot r^2 = 2\pi r\cdot(h + r)}$$

Für den Rauminhalt des Zylinders gilt

$$\boxed{V = \pi r^2\cdot h}$$

Die Pyramide

==



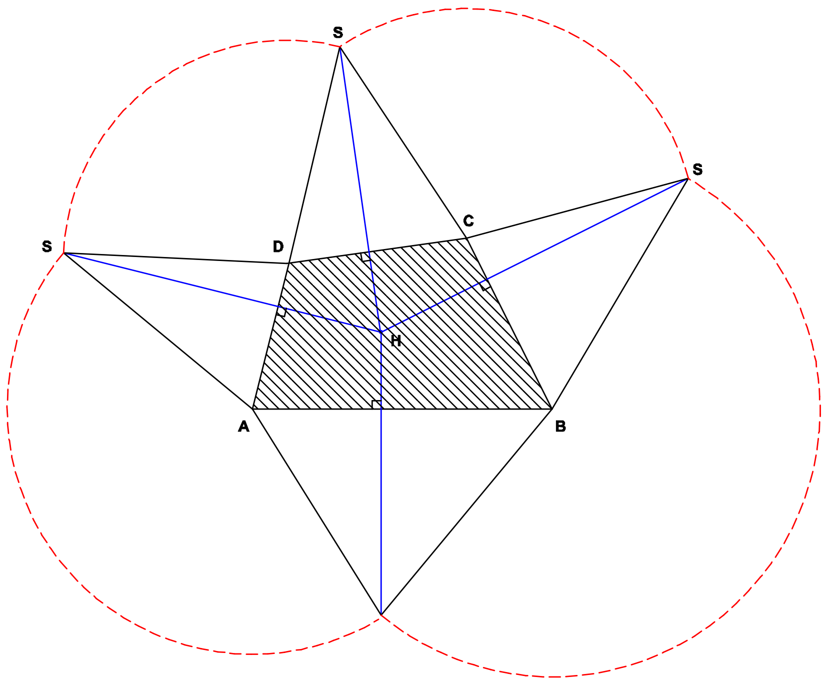
Verbindet man die Ecken eines n-Ecks mit einem Punkt S, der mit dem dem n-Eck nicht in einer Ebene liegt, dann bilden die so erhaltenen Dreiecke zusammen mit dem n-Eck die Oberfläche einer n-seitigen ***Pyramide***.

Das n-Eck heißt die Grundfläche und S die ***Spitze*** der Pyramide.

Der Abstand der Spitze S von der Ebene, in der die Grundfläche liegt, heißt ***Höhe h*** der Pyramide. Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Ebene heißt ***Höhenfußpunkt H***.

Eine Pyramide heißt ***gerade***, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind. Die Grundfläche besitzt dann einen Umkreis und der Höhenfußpunkt H ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Eine Pyramide heißt ***regelmäßig***, wenn sie gerade und die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.

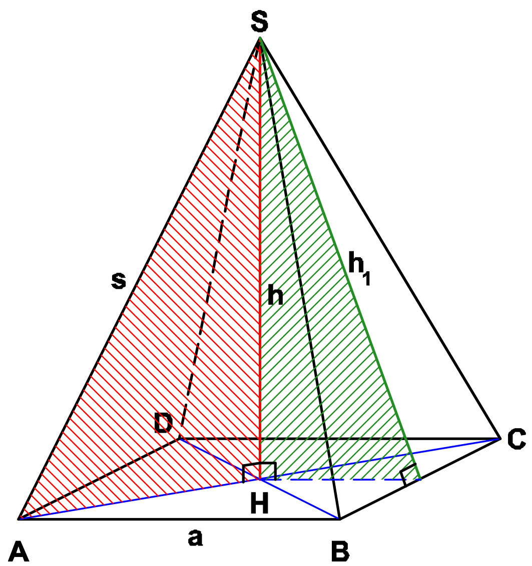


Im Netz einer Pyramide schneiden sich die Lote von den Spitzen der Seitenflächen auf die Grundkanten bzw. deren Verlängerungen im Höhenfußpunkt H.

Für den Rauminhalt V einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h gilt

$$\boxed{V = \frac{1}{3} G \cdot h}$$

Die gerade quadratische Pyramide



Ist die die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Höhe h ein Quadrat mit der Seitenlänge a, dann gilt

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Für die Länge s einer Seitenkante gilt

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$$

Die Seitenfläche der Pyramide sind gleichsschenklige Dreiecke mit der Basis a. Für die Höhe h_1 auf die Basis gilt

$$h_1^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_1^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

Damit gilt für den den Oberflächeninhalt der Pyramide

$$O = a^2 + 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}} = a^2 + a\cdot\sqrt{4h^2+a^2}$$

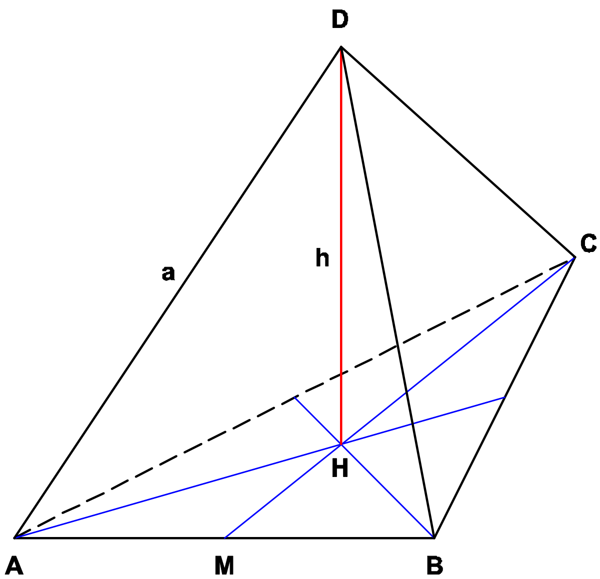
Bemerkungen :

a) Die bei der Berechnung der Seitenkante s und der Höhe h_1 benutzten rechtwinkligen Dreiecke nennt man auch ***Stützdreiecke***.

b) Sind die Seitenkanten genauso lang wie die Grundkanten, dann ergibt sich

$$V = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2} \text{ und } O = a^2 + a^2\sqrt{3}$$

Tetraeder



Grund- und Seitenflächen eines Tetraeders sind kongruente gleichseitige Dreiecke. In Abhängigkeit von der Kantenblänge a gilt

$$V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} \text{ und } O = a^2\sqrt{3}$$

Begründung :

$$a^2 = \overline{CM}^2 + \frac{a^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \overline{CM} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \overline{CH} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

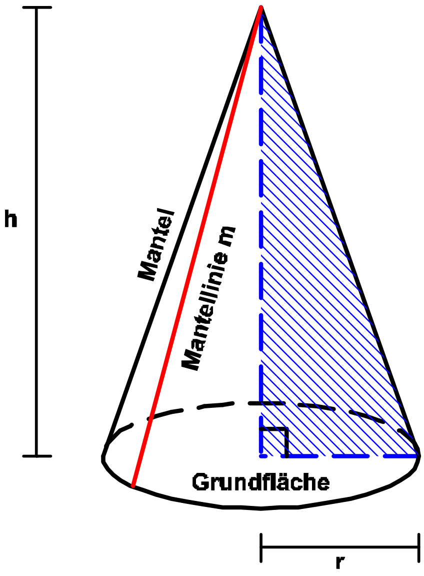
$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \quad\Rightarrow\quad h^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\overline{CM}\cdot h = \frac{1}{6}a\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$$

$$O = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \overline{CM} = 2a \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$$

Der Kegel

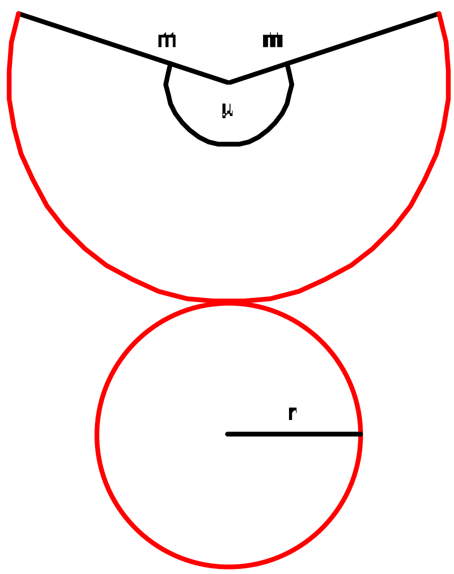
==



Den Rotationskörper, der ensteht, wenn ein rechteckwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten rotiert, nennt man man geraden ***Kegel***. Die Grundfläche des Kegels ist ein Kreis mit dem (Kegel-)radius r. Der Rest der Oberfläche heißt Mantel des Kegels.

Die Verbindungsstrecke der Spitze S des Kegels mit einem Punkt des Grundkreises heißt Mantellinie m.

Rollt man den Mantel eines geraden Kegels ab, dann erhält man einen Kreissektor mit dem Radius m, dessen Bogenlänge gleich dem Umfang des Grundkeises ist.



Ist µ der Miitelpunktswinkel dieses Sektors, dann ist

$$2\pi r = \frac{\mu}{360°} \cdot 2\pi m \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{360°} = \frac{r}{m}$$

Für den Inhalt M der Mantelfläche M bzw. der Oberfläche O eines Kegels mit dem Radius r und der Mantellinie m gilt dann

$$\boxed{M = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi r^2 = \pi r m} \text{ bzw. } \boxed{O = \pi r^2 + \pi r m = \pi r \cdot (r + m)}$$

Für den Rauminhalt V eines Kegels mit dem Radius r und der Höhe h m gilt

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}$$

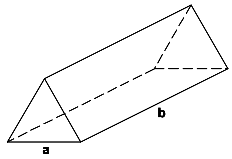
Dabei gilt $\boxed{m^2 = r^2 + h^2}$.

Aufgaben

---

1. Die Grundfläche des des geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a.

   Berechne die jeweils fehlenden Größen !



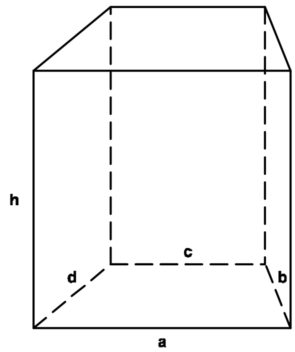
a	3 cm	4 cm	5 cm		
b	20 cm			10 cm	15 cm
V		200 cm^3		300 cm^3	
O			400 cm^2		500 cm^2

---

2. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Grundseiten a = 10 cm und c = 6 cm-

   Ferner ist b = d = 5 cm und h = 8 cm.

   Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Prismas.



---

3. Die Grundfläche eines 5 cm hohen geraden Prismas ist eine Raute mit den Diagonalen e = 4 cm und f = 8 cm.

   Berechne Rauminhalt und Oberflächeninhalt des Prismas.

---

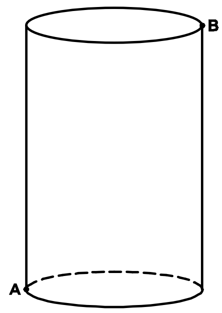
4. Berechne die fehlenden Größen des geraden Kreiszylinders

Radius r	2 cm	3 cm	4 cm		
Höhe h	8 cm				6 cm
Mantelfläche M		120π cm^2		100π cm^2	
Oberflächeninhalt O			360π cm^2	150π cm^2	
Rauminhalt V					180π cm^3

---

5. Der Zylinder hat den Radius 5 cm und ist 12 cm hoch.

   Berechne die Länge des kürzesten Weges auf dem Zylindermantel von A nach B.



---

6. Ein 4 cm langes und 3 cm breites Rechteck rotiert jeweils um eine Seite. Der sich ergebende Rotationskörper ist jeweils ein Zylinder.

   Um wieviel Prozent ist das Volumen des größeren Zylinders größer als das Volumen des kleineren ?

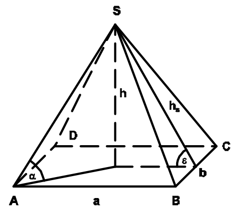
---

7 Berechne die fehlenden Größen der geraden quadratischen Pyramide

Grundkante a	2 cm	4 cm	6 cm		
Höhe h	8 cm			6 cm	2 cm
Seitenkante s		6 cm			4 cm
Oberflächeninhalt O			360 cm^2		
Rauminhalt V				50 cm^3	

---

8. Eine gerade Pyramide besitzt als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a = 4 cm und b = 2 cm. Für die Höhe der Pyramide gilt h = 3 cm.



   a) Berechne den Oberflächeninhalt O und das Volumen V der Pyramide.

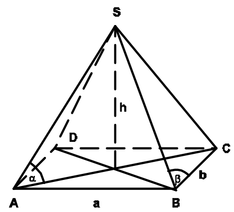
   b) Berechne die Größe der Winkel α und ε.

   c) Durch eine Ebene durch den Mittelpunkt der Höhe parallel zur Grundfläche wird die Ebene zwei Körper (eine Pyramide und einen Pyramidenstrunpf) zerlegt.

   Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Körper ?

---

9. Für nebenstehende gerade Pyramide mit der Höhe h gilt :



   a = 8 cm und b = 6 cm

   a) Berechne α, wenn h = 5 cm. b) Berechne h, wenn β = 80°.

---

10. Ein 8 cm hoher Kegel mit 4 cm Radius wird mit einem Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert.

    Berechne den Oberflächeninhalt der beiden entstehenden Teilpörper.

---

11. Ein Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 162° und dem Radius 6 wird zu einem Kegelmantel gebogen. Welchen Rauminhalt hat der Kegel mit diesem Mantel ?

---

12. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a = 3 cm und b = 4 cm rotiert

    a) um jede der Katheten b) um die Hypotenuse.

    Berechne jeweils Volumen und Oberflächeninhalt der entstehenden Körper.