Lineare Gleichungen mit zwein Unbekannten

===

1. Gib ohne aufzulösen an, ob das Gleichungssystem Gleichungssystem keine bzw. unendviele Lösungen besitzt.

a) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 6x+3y & = & 15 \\ (2) & 2x+y & = & 5 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 3x+y & = & 4 \\ (2) & x+3y & = & 4 \end{array}$ c) $\begin{array}{c|rcl} (1) & x+y & = & 1 \\ (2) & -x-y & = & 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{c|rcr} (1) & -x+2y & = & 3 \\ (2) & 2x-4y & = & -6 \end{array}$ e) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 4x+y & = & 1 \\ (2) & 4x-y & = & 1 \end{array}$ f) $\begin{array}{c|rcr} (1) & 2{,}4x-1{,}8y & = & 3{,}2 \\ (2) & -1{,}44x+1{,}08y & = & -2{,}16 \end{array}$

----

2. Löse mit verschiedenen Lösungsverfahren

a) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 2x-5y & = & 1 \\ (2) & 3x+2y & = & 30 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 2x+3y & = & 17 \\ (2) & 3x-y & = & 9 \end{array}$

----

3. Löse mit einem geeigneten Verfahren

a) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 7x+8y & = & 23 \\ (2) & 22x+12y & = & 20 \end{array}$ b) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 3{,}6x-y & = & 0{,}48 \\ (2) & 5{,}2x-1{,}5y & = & 0{,}59 \end{array}$

c) $\begin{array}{c|rcl} (1) & \frac{x}{3}+\frac{y}{5} & = & \frac{4}{3} \\ (2) & \frac{x}{6}-\frac{y}{10} & = & \frac{1}{6} \end{array}$ d) $\begin{array}{c|rcr} (1) & 2x-3y & = & -1 \\ (2) & 4x-5y & = & 2 \end{array}$

e) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 25x-24y & = & 66 \\ (2) & 15x-36y & = & 72 \end{array}$ f) $\begin{array}{c|rcr} (1) & 2x-3y & = & -1 \\ (2) & 4x-5y & = & 2 \end{array}$

g) $\begin{array}{c|rcl} (1) & \frac{1}{x}+\frac{2}{y} & = & 10 \\ (2) & \frac{4}{x}+\frac{3}{y} & = & 20 \end{array}$ h) $\begin{array}{c|rcl} (1) & 5x-\frac{8}{y} & = & 13 \\ (2) & 7x-\frac{10}{y} & = & 18{,}5 \end{array}$

----

4. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & x + ay & = & 1 \\ & & & \text{mit } a \in \mathbb{Q}. \\ (2) & 3x + 2y & = & 4 \end{array}$$

a) Bestimme den Parameter a so, dass das Gleichungssystem die Lösung $(4|-4)$ besitzt.

b) Untersuche, ob a so geählt werden kann, dass das Gleichungssystem keine bzw. unendviele Lösungen besitzt.

c) Bestimme die Lösung des Systems in Abhängigkeit von a.

---

5. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & ax - 2y & = & 2 \\ & & & \text{mit } a, b \in \mathbb{Q}. \\ (2) & 3x + 4y & = & b \end{array}$$

Wähle a und b so, dass das System unendlich viele Lösungen besitzt und gib für diesen Fall die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

---)

6. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & x + 2y & = & b \\ & & & \text{mit } a, b \in \mathbb{Q}. \\ (2) & y & = & ax \end{array}$$

Bestimme je ein Zahlenpaar a und b, so dass das Gleichungssystem keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

---

7. Das Dreifache des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist um 20° kleiner als das Doppelte der Summe der Basiswinkel.

   Berechne dieWinkel des Dreiecks.

---

8. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten hat unendlich viele Lösungen. Oft interessieren nur natürliche oder ganzzahlige Lösungen.

   Suche drei ganzzahlige Lösungspaare der Gleichung $3x + 2y = 7$.

---

9. Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 5:4. Verkürzt man beide Seiten um 3 cm, dann erhält man ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 126 cm^2 kleiner als der des ur sprünglichen Rechtecks ist. Welchen Flächenhalt hatte dieses ?

Lösungen

==

1. a) Das System hat unendlich viele Lösungen.

   b) Das System hat eine Lösung.

   c) Das System ist unlösbar.

   d) Das System hat unendlich viele Lösungen.

   e) Das System hat eine Lösung.

   f) Das System hat unendlich viele Lösungen.

---

2. a) $L = \left\{ \left(8 \mid 3 \right) \right\}$ b) $L = \left\{ \left(4 \mid 3 \right) \right\}$

---

3. a) $x = -\frac{29}{23} \wedge y = \frac{183}{46}$ b) $x = 0{,}65 \wedge y = 1{,}86$

   c) $x = 2{,}5 \wedge y = 2{,}5$ d) $x = 5{,}5 \wedge y = 4$

   e) $x = 1{,}2 \wedge y = -1{,}5$ f) $x = 5{,}5 \wedge y = 4$

   g) $x = 0{,}5 \wedge y = 0{,}25$ h) $x = 3 \wedge y = 4$

---

4. a) Die Lösung $(4 \mid -4)$ in die Gleichung (1) eingesetzt :

   $$4 + a \cdot (-4) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 - 4a = 1 \quad \Rightarrow \quad -4a = -3 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}75$$

   Überprüfen, ob die Gleichung (2) steimmt :

   $$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 12 - 8 = 4$$

   b) Gleichung (1) nach y aufgelöst :

   $$x + ay = 1 \quad \Rightarrow \quad ay = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} \text{ falls } a \neq 0$$

   Gleichung (2) nach y aufgelöst :

   $$3x + 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad 2y = -3x + 4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

   Die Geraden sind parallel, wenn $-\frac{1}{a} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$.

   Die Geraden sind aber nicht parallel.

Sonderfall : $a = 0$

Dann erhält man das Gleichungssystem

(1) $x = 1$

In (2) eingesetzt : $3 \cdot 1 + 2y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

Ergebnis :

Für $a \neq \frac{2}{3}$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Für $a = \frac{2}{3}$ ist das Gleichnungssystem unlösbar.

c) $x = \frac{42-2}{3a-2} \wedge y = \frac{1}{3a-2}$

---

5. Das Gleichnungsystem besitzt genau dann unendlich viele Lösungen,

wenn die Gleichung (2) das -2-fache der Gleichung (1) ist. Daraus ergibt sich

$a = -\frac{3}{2}$ und $b = -4$

---

6. Auflösung der Gleichung (1) nach y :

$x + 2y = b \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{x}x + b$

Vergleich mit der Gleichung (2) ergibt z. B.

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung, wenn $a = -\frac{1}{2}$ und $b = 1$ ist.

Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung für $a = 1$ und $b = 1$ ist.

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $a = -\frac{1}{2}$ und $b = 0$ ist.

---

7. Winkel an der Spitze : γ

Basiswinkel : α

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & 2\alpha + \gamma & = & 180° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 180° - 2\alpha \\ & \overset{(2)}{} & & \\ (2) & 3\gamma + 20° & = & 4\alpha \end{array}$$

$$(1) \text{ in } (2) \left| \; 3\cdot(180° - 2\alpha) + 20° = 4\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 56° \right.$$

$$\text{in } (1) \left| \; \gamma = 180° - 2\cdot 56° = 68° \right.$$

---

8. Auflösen der Gleichung nach y :

$$3x + 2y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-3x+7}{2}$$

x muss daher so gewählt werden, dass $-3x+7$ gerade ist.

x	1	3	5
$y = \dfrac{-3x+7}{2}$	2	-1	-4

---

9. Länge des Rechtecks : x

Breite des Rechteck : y

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & \dfrac{x}{y} & = & \dfrac{5}{4} \\ (2) & x\cdot y - (x-3)\cdot(y-3) & = & 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & x & = & \dfrac{5}{4}x \\ (2) & x\cdot y - (x\cdot y - 3\cdot x - 3\cdot y + 9) & = & 126 \;\Leftrightarrow\; x + y = 45 \end{array}$$

$$(1) \text{ in } (2) \left| \; \frac{5}{4}y + y = 45 \;\Leftrightarrow\; y = 20 \right.$$

$$\text{in}(1) \left| \; x = \frac{5}{4}\cdot 20 = 25 \right.$$
