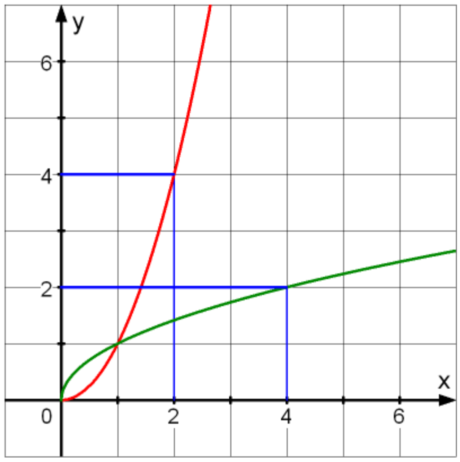
III. Die Umkehrung einer Funktion

==

3.1. Definition



1. Lässt sich jedem y-Wert aus der Wertemenge W_f einer Funktion f genau ein x-Wert aus der Definitionsmenge D_f mit $f(x) = y$ zuordnen, dann sagt man die Funktion f sei auf D_f umkehrbar.

   Die Zuordnung, die jedem y-Wert den x-Wert mit $f(x) = y$ zuordnet, heißt **Umkehrfunktion f^{-1}** von f.

   Also $\mathbf{f^{-1}: \; y \to x \; = \; f^{-1}(y)}$ mit $\mathbf{D_{f^{-1}} = W_f \quad W_{f^{-1}} = D_f}$

   Beispiel :

   Für $f: x \to y = f(x) = 2x + 3$ gilt $f: 1 \to 5$ und damit $f^{-1}: 5 \to 1$

2. Man erhält die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion, wenn man die Funktionsgleichung von f, y = f(x), nach x auflöst.

   Beispiel :

   $$f(x) = y = 2x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

   Also ist $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

3. Bezeichnet man die Elemente der Definitionsmenge $D_{f^{-1}}$ wieder mit x, die der Wertemenge $W_{f^{-1}}$ wieder mit y, dann erhält die f^{-1} die Form

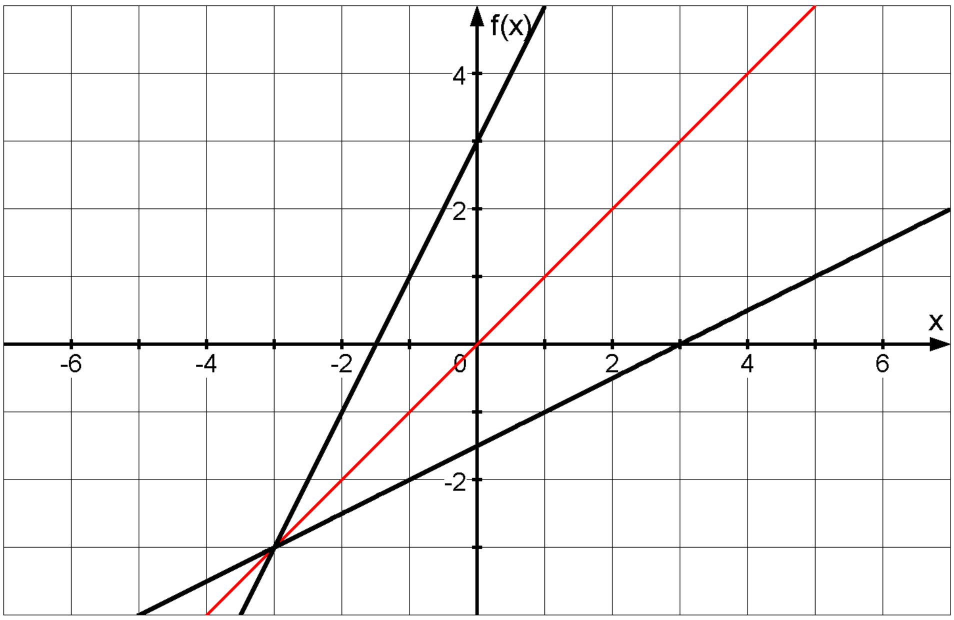
$$\mathbf{f^{-1} : x \to y = f^{-1}(x)}$$

Geometrische Bedeutung dieser Transformation :

Der Graph von f^{-1} in dieser Form ergibt sich aus durch Spiegelung des Graphen von f, G_f, an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

Beispiel :

$f^{-1} : x \to y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



Bemerkungen :

1. Eine Funktion f ist genau dann umkehrbar, wenn verschiedenen x-Werten auch verschiedene y-Werte zugeordnet werden können.

$$\boxed{\mathbf{x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)}}$$

Folgerungen :

1. Jede auf ganz D_f streng monotone Funktion f ist umkehrbar.

2. Die Verknüpfung einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion ergibt die Identiät.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{(f \circ f^{-1})\,(x) = x,\ x \in D_{f^{-1}}} \\ \mathbf{(f^{-1} \circ f)\,(x) = x,\ x \in D_f}\end{array}}$$

Beispiel :

$f : x \to x^2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$ ist umkehrbar mit $f^{-1} : x \to \sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$.

Also ist $(f \circ f^{-1})\,(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ und $(f^{-1} \circ f)\,(x) = \sqrt{x^2} = \left| x \right| = x$ da $x \geq 0$.

3. Ist f streng monoton steigend (fallend), dann ist f^{-1} im selben Sinn monoton.

Begründung :

Strenges monotones Wachsen bedeutet $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

und strenges montonens Fallen $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$
