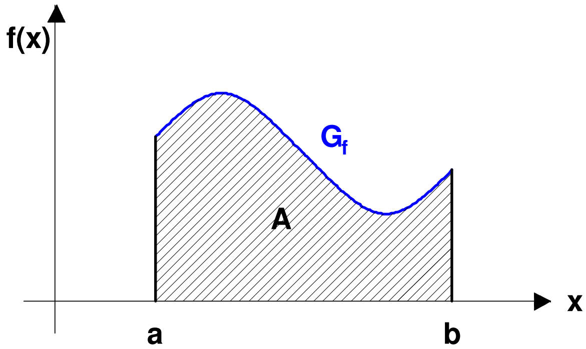
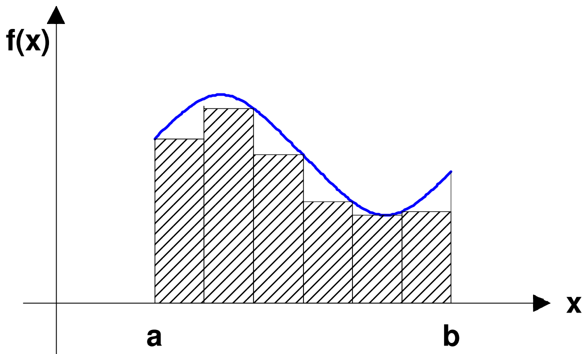
I. Integralrechnung 1

1.1 Ober- und Untersumme

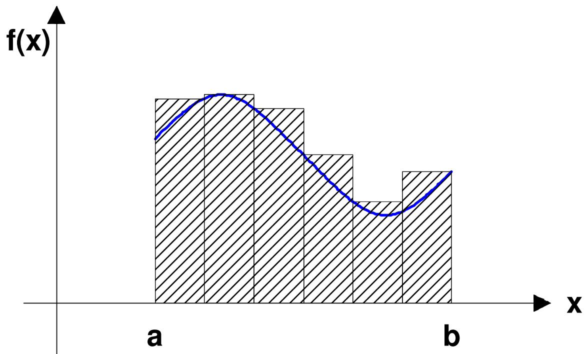
f sei eine auf dem Intervall [a;b] definierte, positive Funktion



Wir wollen den Inhalt A der Fläche bestimmen, den der Graph von f mit der x-Achse und den zu a und b gehörendenden Ordinaten einschließt.



Untersumme U(6)



Obersumme 0(6)

Man unterteilt das Intervall [a;b] in n gleiche Teile der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Die Flächensumme der n dem Graphen einbeschriebenen Rechtecke der Breite Δx heißt die Untersumme U(n) und die der umbeschriebenen Rechtecke die Obersummer O(n) der Funktion f auf [a; b]

Es ist

$$U(n) \leq A \leq O(n)$$

Existieren $\lim\limits_{n \to \infty} U(n)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} O(n)$ und sind beide Grenzwerte gleich, dann heißt f über [a;b] integrierbar.

Man schreibt

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} U(n) = \lim_{n \to \infty} O(n) = \int_a^b f(x)dx}$$

und nennt $\int_a^b f(x)dx$ **bestimmtes Integral** von f über [a;b].

$\int_a^b f(x)dx$ ist dann der gesuchte Inhalt A.

Bezeichnungen :

$\int$ heißt Integrationszeichen und die Funktion f **Integrand**

a heißt **untere** und **b obere Integrationsgrenze**

x heißt **Integrationsvariable**

Bemerkung :

Oftmals betrachtet aus der Untersummen- und Obersummenfolge nur die Teilfolgen

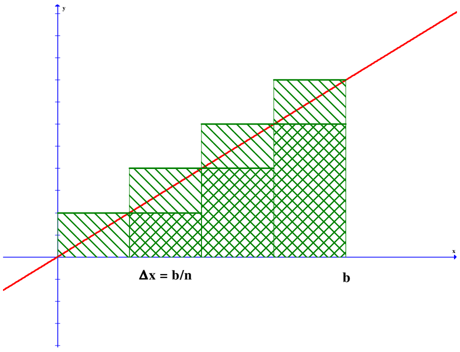
$U_1, U_2, U_4, U_8, ...$ und $O_1, O_2, 0_4, O_8, ...$

Bei ihnen entstehenden die Teilintervalle durch fortgesetzte Halbierung und man spricht daher vom **Intervallhalbierungsverfahren**.

1.2. Beispiele

A Berechnung von $\int_a^b x\,dx$ für $f : x \to x$

Sei $a = 0$



Breite eines Rechtecks : $\Delta x = \frac{b}{n}$

x-Koordinaten der Teilpunkte : $\Delta x, 2\Delta x, ..., (n-1)\Delta x$

y-Koordinaten der Teilpunkte : $\Delta x, 2\Delta x, ..., (n-1)\Delta x$

Obersumme :

$$O(n) = \Delta x \cdot \Delta x + 2\Delta x \cdot \Delta x + ... + n\Delta x \cdot \Delta x = (1+2+..........+n) \cdot \Delta x^2 =$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Untersumme :

$$U(n) = O_n - b \cdot \Delta x = O(n) - \frac{b^2}{n}$$

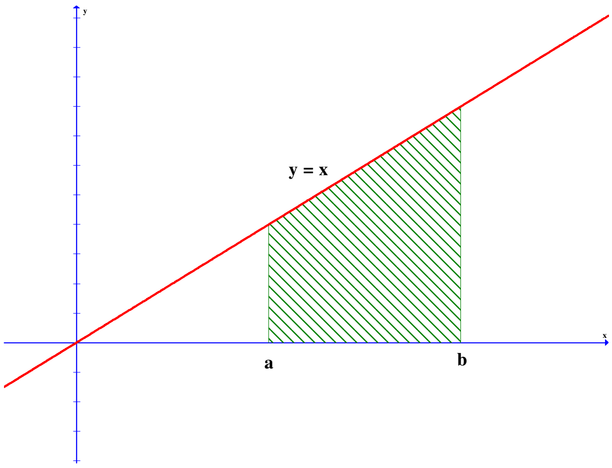
Grenzwerte :

$$\lim_{n\to\infty} O(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^2}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} \left(O(n) - \frac{b^2}{n}\right) = \frac{b^2}{2}$$

Also ist $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$

Sei $a > 0$:

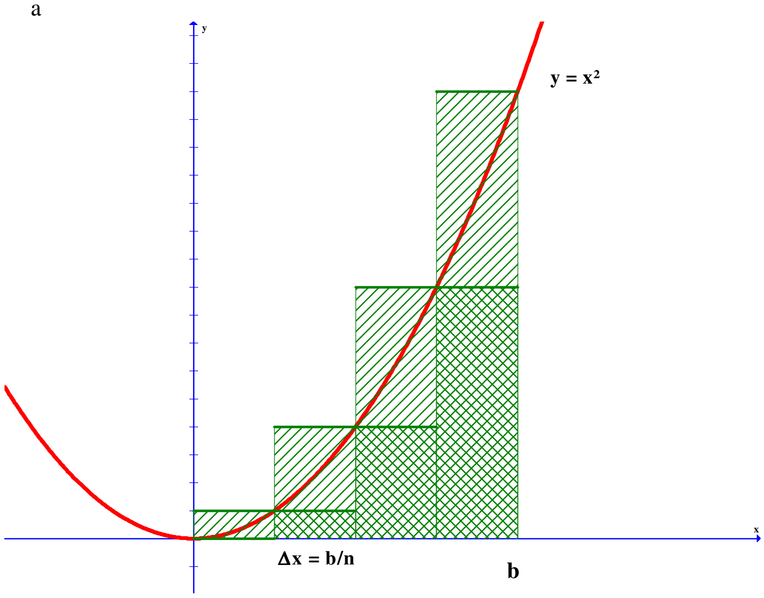
Dann ist $\boxed{\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}$



Überprüfung mit **Trapezformel** :

$$A = \frac{1}{2}(a+b)(a-b) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

B Berechnung von $\int_a^b x^2 dx$



Sei $a = 0$

Breite eines Rechtecks : $\Delta x = \frac{b}{n}$

x-Koordinaten der Teilpunkte :$\Delta x,\ 2\Delta x,\ ....,\ (n-1)\cdot\Delta x$

y-Koordinaten der Teilpunkte : $\left(\Delta x\right)^2, \left(2\Delta x\right)^2, ..., \left((n-1)\cdot\Delta x\right)^2$

Obersumme :

$$O_n = \left(\Delta x\right)^2 \cdot \Delta x + \left(2\Delta x\right)^2 \cdot \Delta x + \ldots\ldots\ldots + \left(n\Delta x\right)^2 \cdot \Delta x = = (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2) \cdot \left(\Delta x\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})$$

Untersumme :

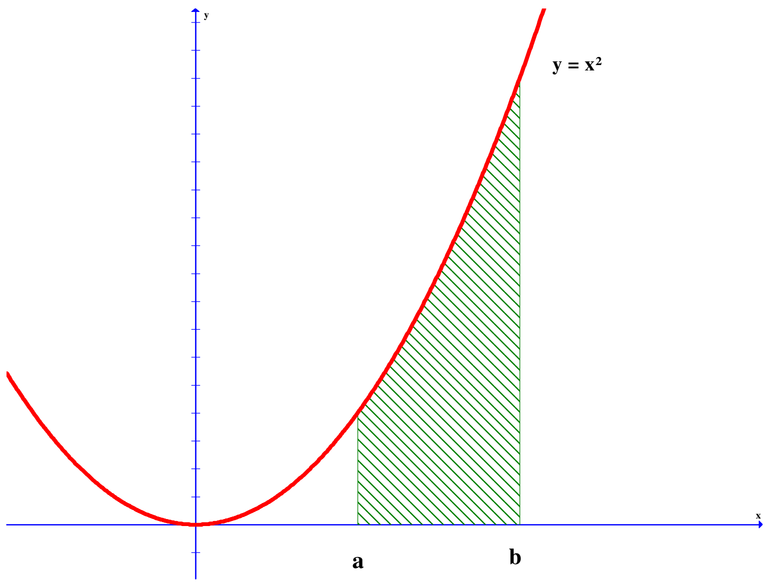
$$U = O_n - b^2 \cdot \Delta x = S_n - \frac{b^3}{n}$$

Grenzwerte :

$$\lim_{n \to \infty} O_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b^3}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) = \frac{b^3}{3} \qquad \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} (O_n - \frac{b^3}{n}) = \frac{b^3}{3}$$

Also ist $\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$

Sei $a > 0$



Dann ist $\boxed{\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$

Allgemein gilt

Satz :

.
Jede auf [a;b] definierte, **nichtnegative** und **stetige** Funktion ist über [a;b] integrierbar..

Beweisskizze für monoton steigende Funktionen :

1. Die Obersummenfolge O(n) ist monoton fallend.

2. Die Untersummenfolge U(n) ist monoton steigend.

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[O(n) - U(n) \right] = \lim\limits_{n \to \infty} \left[f(b) \cdot \Delta x \; - \; f(a) \cdot \Delta x \right] = \lim\limits_{n \to \infty} \left[f(b) \; - \; f(a) \right] \cdot \Delta x \; =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[f(b) \; - \; f(a) \right] \cdot \frac{b-a}{n} \; = \; 0$$

$\Rightarrow$ Die Intervalle $\left[U(n) \; ; \; O(n) \right]$ bilden eine Intervallschachtelung.

1.3 Aufhebung von Beschränkungen - Ergänzungen

Erweiterung der Menge integrierbarer Funktionen

Es lässt sich zeigen :

Jede auf einem Intervall [a;b] stetige, positive Funktion ist über [a;b] integrierbar.

Integration von Funktionen mit negativen Funktionswerten

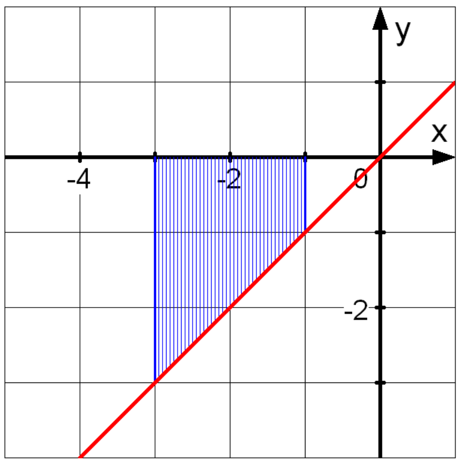
Die Definition des bestimmten Integrals ist auch auf Funktionen, die auf [a;b] **negativ** sind, anwendbar.

Bildet man wie bei positiven Funktionen Ober- und Untersumme, d. h. wählt man als "Höhen" der Rechtecke Funktionswerte, dann ergibt sich, falls f integrierbar ist, ein **negativer** Wert für das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ist, den der Graph von f mit der x-Achse und den zu a und b gehörenden Ordinaten einschließt.

Die bisherigen Integrationsformeln bleiben weiterhin gültig.

Beispiel :

$$\int_{-3}^{-1} x\,dx = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

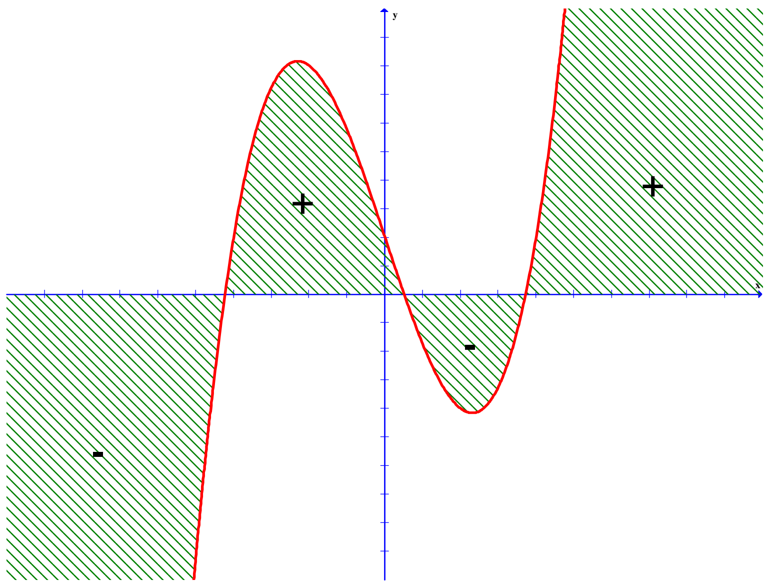


Folgerung :

Wechselt f in [a;b] das Vorzeichen, dann zählen die über der x-Achse liegenden Flächenstücke positiv, die unter der x-Achse liegenden Flächenstücke negativ zum Integralwert.

Das ergibt einen Integralwert, der gleich der **Inhaltsdifferenz** der oberhalb und der unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke ist.

Bei Flächenberechnungen darf man also nicht über Schnittstellen mit der x-Achse hinweg integrieren.

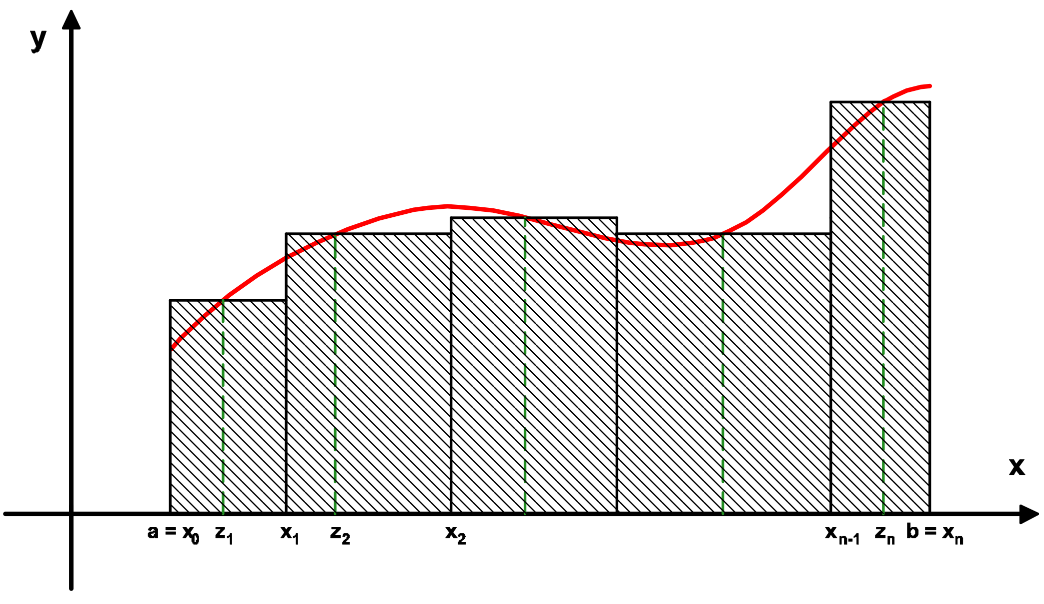


Wechsel der Integrationsvariablen

Ein **Wechsel der Integrationsvariablen** ändert den Integralwert nicht :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \text{ etc.}}$$

Verallgemeinerung der Definition des bestimmten Integrals



Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ einer integrierbaren Funktion f erhält man auch, wenn man eine einzige Folge von Rechtecken zur Approximation benützt.

Für diese Folge muss gelten

a) Die Anzahl der Rand und Teilpunkte x_i, $0 \le i \le n$, durchläuft eine beliebige, gegen ∞ gehende Folge natürlicher Zahlen.

b) Die Breiten der Rechtecke dürfen unterschiedlich sein, müssen aber mit wachsendem n gegen Null gehen.

c) Die "Höhe" des i.ten, $1 \le i \le n$, Rechtecks ist gleich $f(z_i)$ mit $z_i \in [x_{i-1} ; x_i]$Dann ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}.$$

1.4 Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_2^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} - \frac{2^3}{3} = -\frac{7}{3}$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen

Ist f über [a;b] integrierbar, dann ist $\boxed{\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = -\int_b^a \mathbf{f(x)\,dx}}$

Begründung :

Sind x_{i-1} und x_i $(1 \le i \le n)$ aufeinanderfolgende Teilpunkte $(x_0 = a,\ x_n = b)$, dann gilt

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} < 0$$

Übereinstimmende Integralgrenzen

Ist $a = b$, dann $\boxed{\int_a^a \mathbf{f(x)\,dx = 0}}$

Additivität des bestimmten Integrals

Ist f über [a;b] integrierbar, dann ist $\boxed{\forall \mathbf{c},\quad \mathbf{a < c < b},\qquad \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \int_a^c \mathbf{f(x)\,dx} + \int_c^b \mathbf{f(x)\,dx}}$

Ist f über [a;b] integrierbar, dann ist auch $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$ über [a; b] integrierbar, und es gilt :

$$\boxed{\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad k \in \mathbb{R}}$$

Begründung :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k \cdot f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = k \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Sind f und g über [a;b] integrierbar, dann ist auch $f + g$ über [a;b] integrierbar, und es gilt :

$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

Beispiel :

Damit ist $\int_a^b (a_2x^2 + a_1x + a_0)dx = a_2\frac{b^3}{3} - a_2\frac{a^3}{2} + a_1\frac{b^2}{3} - a_1\frac{a^2}{2} + a_0b - a_0a$

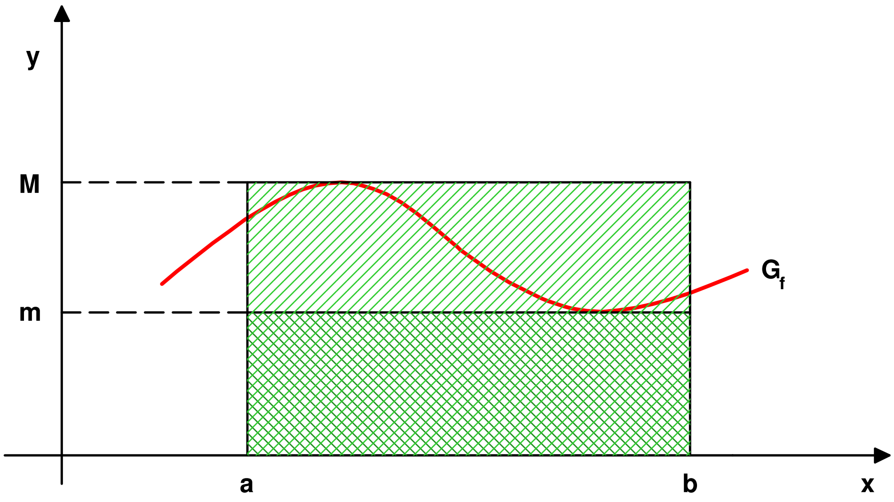
Sind f und g über [a;b] integrierbar und ist $f(x) \le g(x)\ \ \forall x \in [a;b]$, dann ist

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx}$$

Folgerung :

Sei f auf [a;b] stetig mit $m := \min\left[f(x)\right]$ und $M := \max\left[f(x)\right]$ auf [a;b]. Dann gilt

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}.$$



y
M
m
G_f
a
b
x

1.5 Die Integralfunktion

Definition :

Die Funktion f sei auf einem offenen I definiert und **stetig**. Ist $a \in I$, dann heißt die Funktion

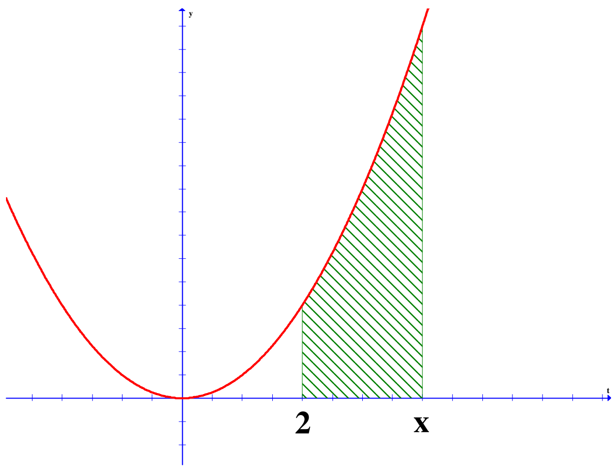
$$\mathbf{F : x \to \int_a^x f(t)\,dt \qquad D_F = D_f}$$

Integralfunktion zur Funktion f.

f heißt **Integrand** der Integralfunktion

Beispiel:

Sei $F : x \to \int_2^x t\,dt$. Dann ist $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2$



Differenziert man F, dann erhält man $F'(x) = \left[\frac{x^2}{2} - 2\right]' = x = f(x)$, also f an der Stelle x.

Das ist kein Zufall !

1.6 Die Ableitung der Integralfunktion

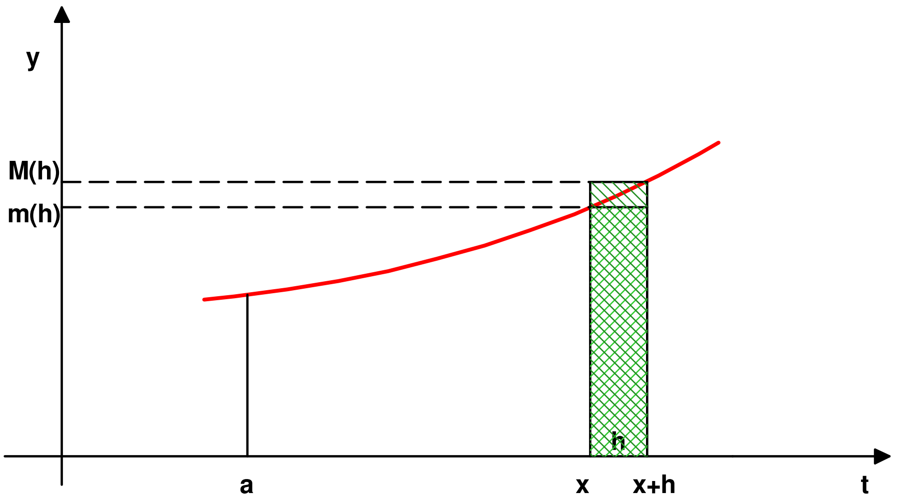
Allgemein gilt : Eine Funktion F ist an einer Stelle x differenzierbar, wenn gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} = F'(x)$$

Rechtseitige Ableitung der Integralfunktion :

Für $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ ist

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$



Sei $m(h) := \min\left\{ f(t) \,\middle|\, x \le t \le x+h \right\}$ $\quad M(h) := \max\left\{ f(t) \,\middle|\, x \le t \le x+h \right\}$

$$\begin{aligned} & m(h)\cdot h && \le && F(x+h)-F(h) && \le && M(h)\cdot h \\ \text{Dann gilt :}\quad & m(h) && \le && \frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \le && M(h) \\ & f(x) && \le && F'(x) && \le && f(x) \end{aligned}$$

Eine anloge Rechnung ergibt f(x) als linksseitige Ableitung von F.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnungrechnung

Die Funktion f sei auf dem offenen Intervall I definiert und stetig.

Für $a \in I$ ist die Funktion $\mathbf{F : x \to \int_a^x f(t)\,dt}$ $\quad \mathbf{D_F = D_f}$ auf I differenzierbar und es gilt

$$\boxed{\mathbf{F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)}}$$

In Worten :

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion ist differenzierbar.

Ihre Ableitung ist gleich dem Wert des Integranden an der oberen Grenze.

Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen einer auf einem Intervall I stetigen und differenzierbaren Funktion f und einer Integralfunktion $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ mit $a \in I$:

Integrand : $f : x \to y = f(x)$	Integralfunktion : $F : x \to \int_{-1}^x f(t)dt$
keine Fläche bzw. Inhalte der Flächen ober- bzw. unterhalb der x-Achse zwischen den Integrations-grenzen sind gleich	Nullstelle
positiv	streng monoton wachsend
negativ	streng monoton fallend
Nullstelle a) Vorzeichenwechsel $+ \to -$ b) Vorzeichenwechsel $- \to +$	Extrema Hochpunkt Tiefpunkt

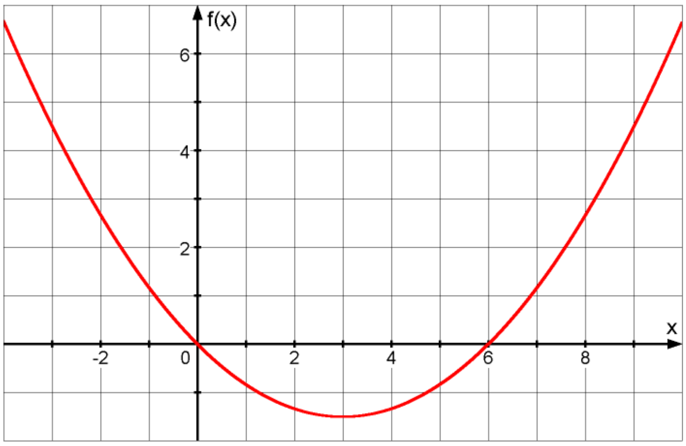
c) kein Vorzeichenwechsel	Terrassenpunkt
monoton steigend	Linkskrümmung
monoton fallend	Rechtskrümmung
Hochpunkt	Wendepunkt
Tiefpunkt	Wendepunkt

Beachte :

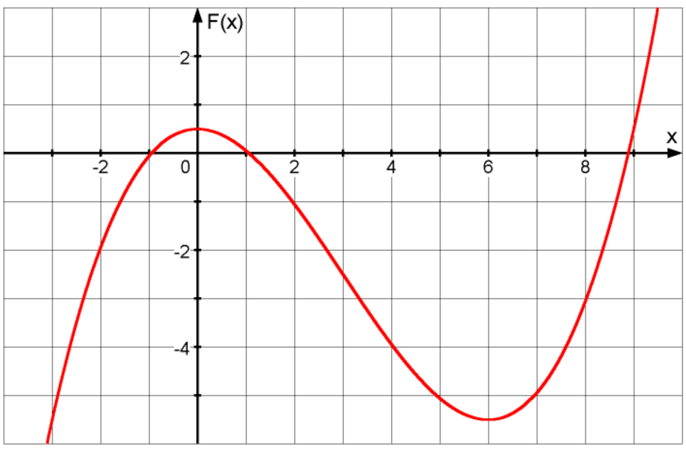
Jede Integralfunktion besitzt die untere Integrationsgrenz als Nullstelle

Beispiel :

$f : x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x$



$F : x \rightarrow \int_1^x (\frac{1}{2}t^2 - 3t)dt$



1.7 Stammfunktionen, bestimmte und unbestimmte Integrale

Für die Integralfunktion einer über dem Intervall [a; b] integrierbaren Funktion f gilt

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)\,dt}\right) = \mathbf{f(x)}}$$

Ist F eine Funktion mit der Ableitung f , dann kann sich F von obiger Integralfunktion nur durch eine Konstante C unterscheiden. Also

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Einsetzen von x = a liefert den Wert dieser Konstanten

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$$

Das ergibt

$$\boxed{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)\,dt = F(x) - F(a)}}$$

mit einer differenzierbaren Funktion F, deren Ableitung gleich f ist.

Einsetzen von b ergibt den Wert des bestimmten Integrals

$$\boxed{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(t)\,dt = F(b) - F(a)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\,dx = F(b) - F(a)}}$$

Beispiel :

$$\int_1^3 (3x + \frac{1}{x^2})dx = \left[\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x}\right]\right]_1^3 = (\frac{27}{3} - \frac{1}{3}) - (\frac{3}{2} - 1) = 12\frac{2}{3}$$

Definition :

Jede differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ auf ganz D_f heißt **Stammfunktion** von f.
Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heißt **unbestimmtes Integral** von f i. Z:.

$$\boxed{\int \mathbf{f(x)\,dx} = \left\{ \mathbf{F} \,\middle|\, \mathbf{F' = f \;,\; D_F = D_f} \right\}}$$

Bemerkung :

Jede Integralfunktion eines Integranden f ist eine Stammfunktion von f, aber nicht jede Stammfunktion von f ist eine Integralfunktion von f.

Beispiel :

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x$, aber keine Integralfunktion,

denn diese haben die Form $I(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, $a \in \mathbb{R}$

Satz :

Die Differenz $F_1 - F_2$ zweier Stammfunktionen einer Funktion f ist auf jedem Intervall $I \subseteq D$ eine Konstante.

Beweis :

$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0$ auf einem Intervall.

1.8 Einige unbestimmte Integrale

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{\int x^n \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C_1 , x > 0 \\ \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C_2 , x < 0 \end{cases} \qquad n = -2, -3, ...}$$

Beachte :

a) Die Bestimmung des unbestimmten Integrals der Funktion $f : x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$ ist auf diese Art nicht möglich.

b) Für $n < 0$ besteht die Definitionsmenge von $f : x \to x^n$ aus zwei Intervallen.

Die Stammfunktionen müssen"astweise" definiert werden.

Anwendung : Integration von Polynomen

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)\, dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + ... + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C$$

Allgemein gilt bei geeigneter Definitionsmenge :

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx} \qquad \boxed{\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx , k \in \mathbb{R}}$$

Weitere wichtige unbestimmte Integrale :

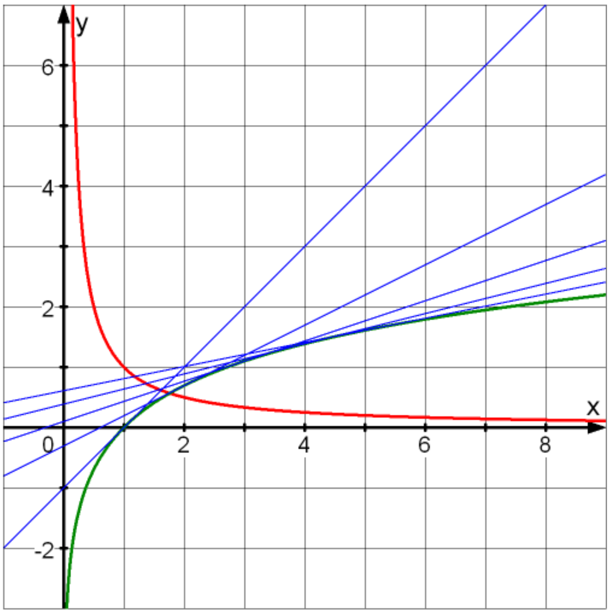
$$\boxed{\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C}$$

Ergänzung :

Die graphische Bestimmung einer Stammfunktion von f : $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}$ mit F (1) = 0

x	1	2	3	4
$F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

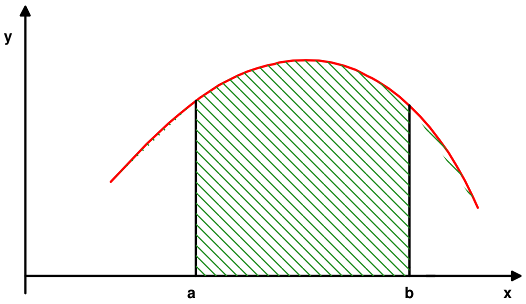
Mit Hilfe der Tangentensteigungen lässt sich der Graph von F näherungsweise zeichnen.

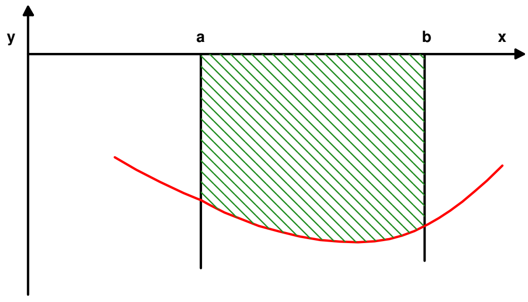


1.9 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

----

a) Flächen zwischen einem Graphen, zwei Ordinaten und der x-Achse





Liegt keine Nullstelle im Intervall]a;b[, dann gilt

$$\boxed{A_a(b) = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|}$$

Ist F eine Stammfunktion, dann hat sich folgendes **Vorgehen** bewährt

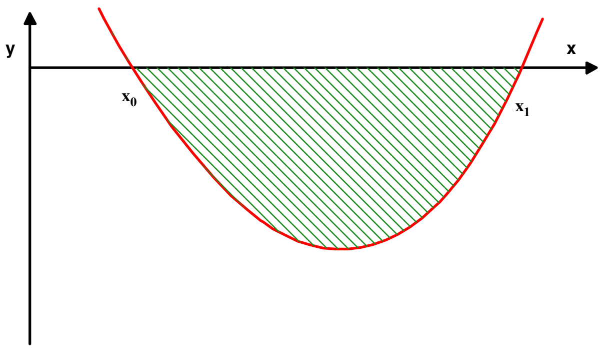
$$\boxed{A_a(b) = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \Big[F(x)\Big]_a^b \right| = \left| F(b) - F(a) \right|}$$

Über Nullstellen die im Innern des Intervalls [a;b] liegen, darf nicht hinwegintegriert werden. Die Bestimmung des Flächeninhalts muss dann abschnittsweise durchgeführt werden.

b) Flächen, die von einem Graphen mit der x-Achse eingeschlossen werden

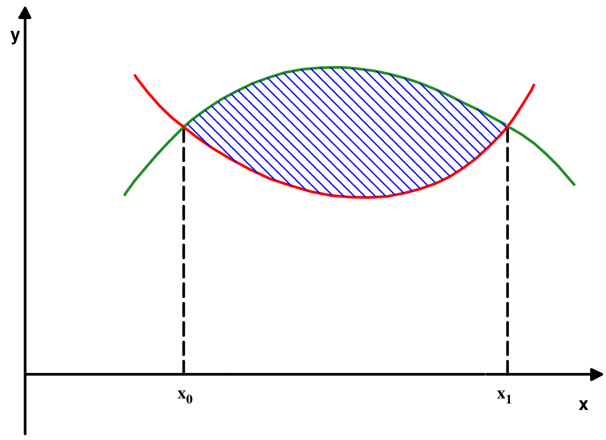
Sind x_0 und x_1 die benachbarten Nullstellen, dann gilt :

$$\boxed{A = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \right|}$$



c) Flächen zwischen zwei Graphen

1. f und g sind positiv



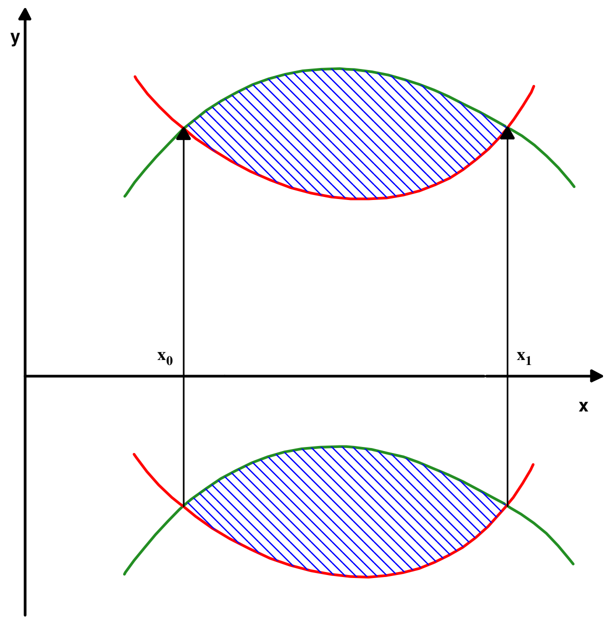
Sind x_0 und x_1 die x-Koordinaten der Schnittpunkte und überschneiden sich die Graphen

in $]x_0;x_1[$ nicht, dann gilt :

$$\boxed{\mathbf{A_S = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_1} [f(x) - g(x)]\, dx \right|}}$$

2. f und g nehmen beliebige Werte an

Eine Verschiebung der Graphen ins "Positive" ändert den Flächeninhalt nicht.



$$A_S = \left| \int_{x_0}^{x_1} [f(x)+c]dx - \int_{x_0}^{x_1} [g(x)+c]dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_1} [f(x)-g(x)]dx \right|$$

Ergänzungen :

Symmetriebeziehung zwischen f(t) und der Integralfunktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

----

1. Der Integrand f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

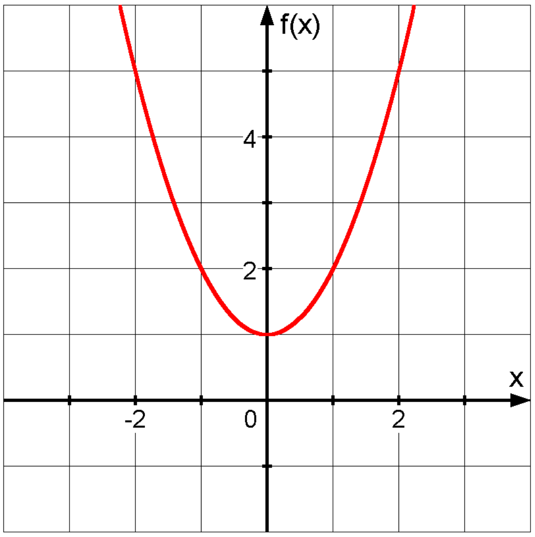
Dann dann ist Graph der Funktion $F_0: x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ punktsymmetrisch zum Ursprung d.h.

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -F_0(x) = -\int_0^x f(t)dt$$

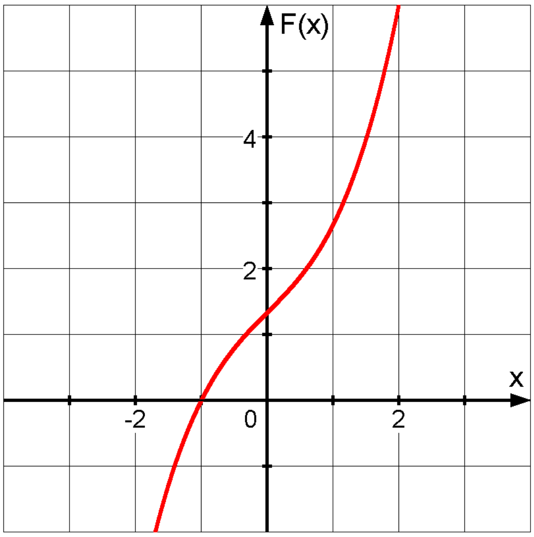
Die Umformung $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ zeigt , dass der Graph von F aus dem

von F_0 durch Verschiebung in y-Richtung hervorgeht und daher punktsymmetrisch zu

$P(0;\int_{x_0}^{0} f(t)dt)$ ist.



$f: x \rightarrow x^2 + 1$



$F: x \rightarrow \int_{-1}^{x} (t^2+1)dt = \frac{x^3}{3} + x + \frac{4}{3}$

2. Der Integrand f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

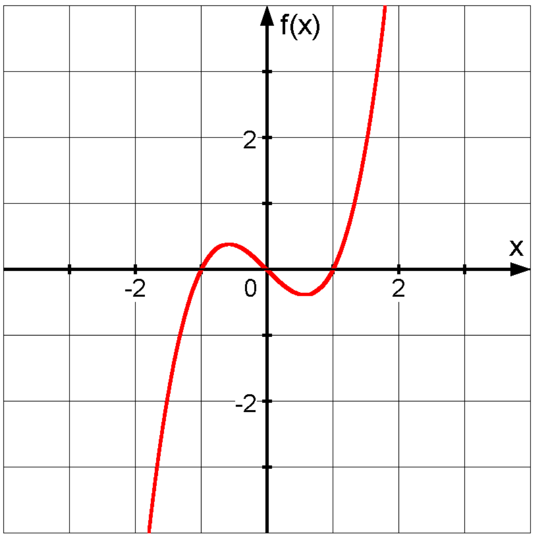
Dann ist der Graph der FunktionF_0: $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ achsensymmetrisch zum Ursprung d.h.

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = F_0(x) = \int_0^x f(t)dt$$

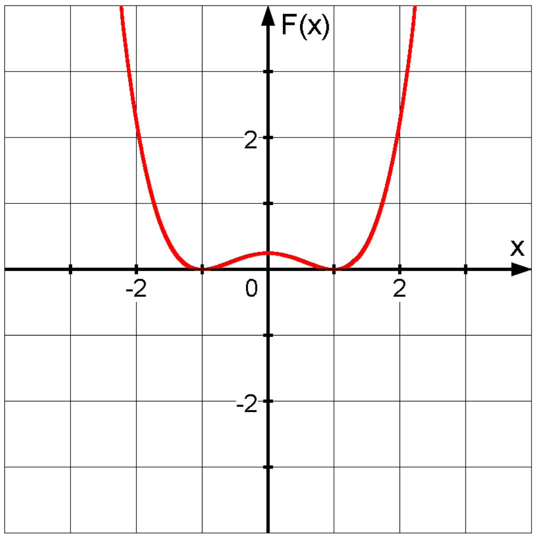
Die Umformung $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ zeigt , dass der Graph von F aus dem

von F_0 durch Verschiebung in y-Richtung hervorgeht und ebenfalls symmetrisch zur

y-Achse liegt.



$f : x \rightarrow x^3 - x$



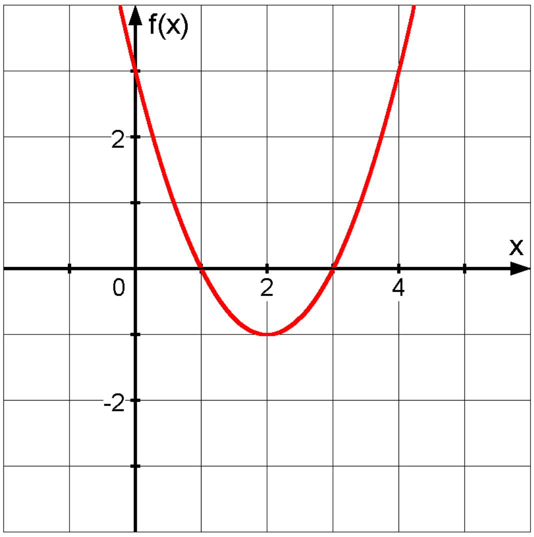
$F : x \rightarrow \int_1^x (t^3 + t)dt = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$

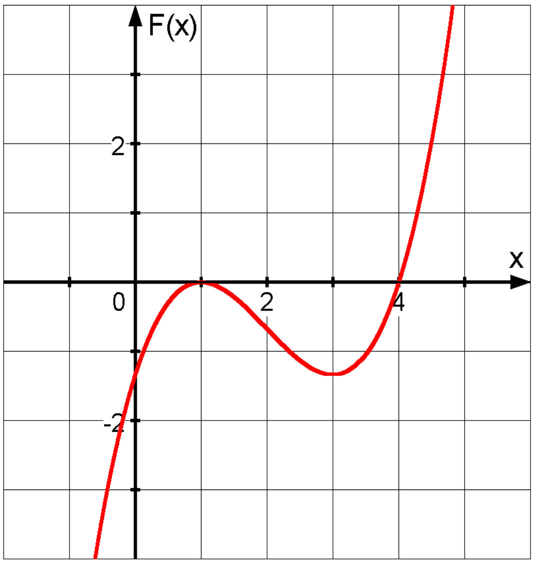
3. Der Integrand f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = a$

Dann ist $F_a : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(a;0)$.

Die Umformung $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{a} f(t)dt + \int_a^x f(t)dt$ zeigt, dass der Graph von F punktsymmetrisch zum

Punkt $P(a;\int_{x_0}^{a} f(t)dt)$ ist.





$$f : x \to (x-2)^2 - 1 \;=\; x^2 - 4x + 3 \qquad F : x \to \int_1^x (t^2 - 4t + 3)dt \;=\; \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{4}{3}$$

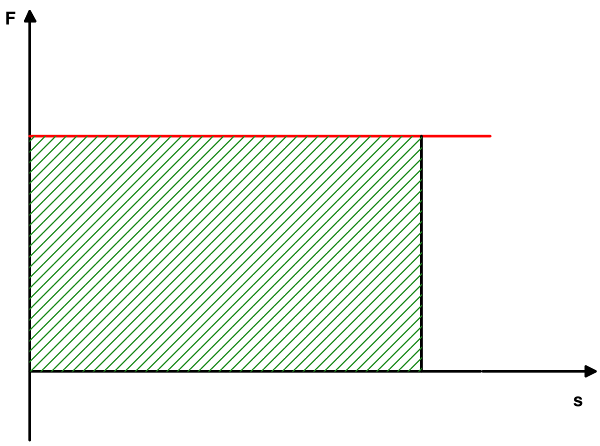
4. Der Integrand f ist punktsymmetrisch zum Punkt P(a;b)

Hier liegt außer im Fall $b = 0$ i. a. keine Symmetrie vor.

Praktische Anwendungen

---

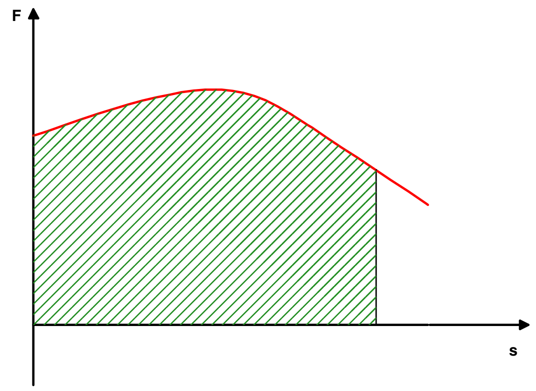
1. Physikalische Arbeit



Wirkt eine konstante Kraft F längs eines Weges s auf einen Körper, dann wird an diesem Körper die Arbeit

$$\boxed{W = F \cdot s}$$

Diese Arbeit wird i.a. als kinetische Energie oder poten   tielle Energie gespeichert bzw. in innere Energie verwandelt.



Flächendeutung :

Die Fläche unter dem s - F - Diagramm ist ein ist gleich der verrichteten Arbeit.

Ist die Kraft F längs des Weges nicht konstant, dann gilt

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta s \text{ oder exakt } W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)ds$$

Beispiel :

Welche Mindestarbeit ist erforderlich um einen der Masse Körper m von der Erde (Erd-radius r_0) in die Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu bringen ?

$$W = \int_{r_0}^{r} m \cdot \frac{k}{r^2} dr = \left[-m \cdot \frac{k}{r} \right]_{r_0}^{r} = \frac{km}{r_0} - \frac{km}{r} = km(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r})$$

Mit $\frac{k}{r_0^2} = g$ folgt $W = mg(r_0 - \frac{r_0^2}{r})$

Um den Körper ganz aus dem Anziehungsbereich der Erde zu bringen ist die Arbeit

$$W = \lim_{r \to \infty} mg(r_0 - \frac{r_0^2}{r}) = mgr_0$$

erforderlich. Diese Arbeit wird meist der kinetischen Energie des Körpers entzogen. Für die erforderliche Mindestgeschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) gilt dann

$$\frac{m}{2} v^2 = mgr_0 \quad v = \sqrt{2gr_0} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} \frac{m}{s} = 7{,}9 \frac{km}{s}$$

---

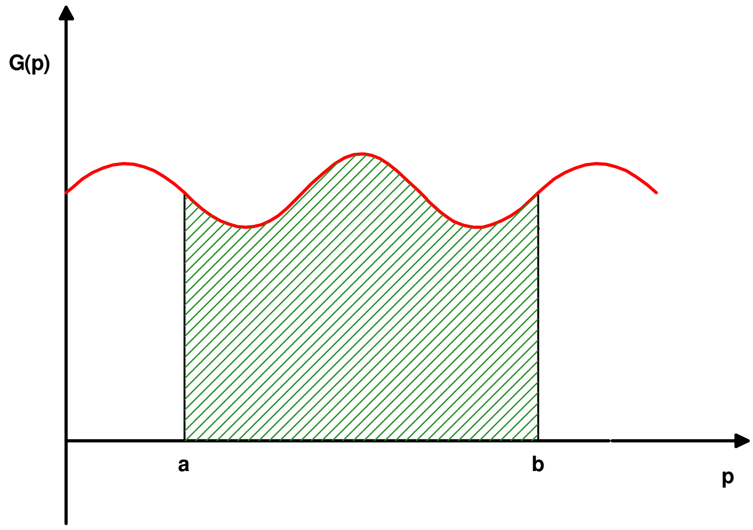
2. Kinematik

Bewegt sich ein Körper mit zeitabhängigen Geschwindigkeit v(t) auf einer Geraden (eindimensionale Bewegung), dann gilt für seine Entfernung x(t) vom Bezugspunkt nach Ablauf der Zeit T

$$x(t) = x_0 + \int_0^T v(t)dt$$

---

3. Der Mittelwert



Der Mittelwert einer parameterabhängigen Größe G(p) hat im Parameterintervall [a;b] den Mittelwert

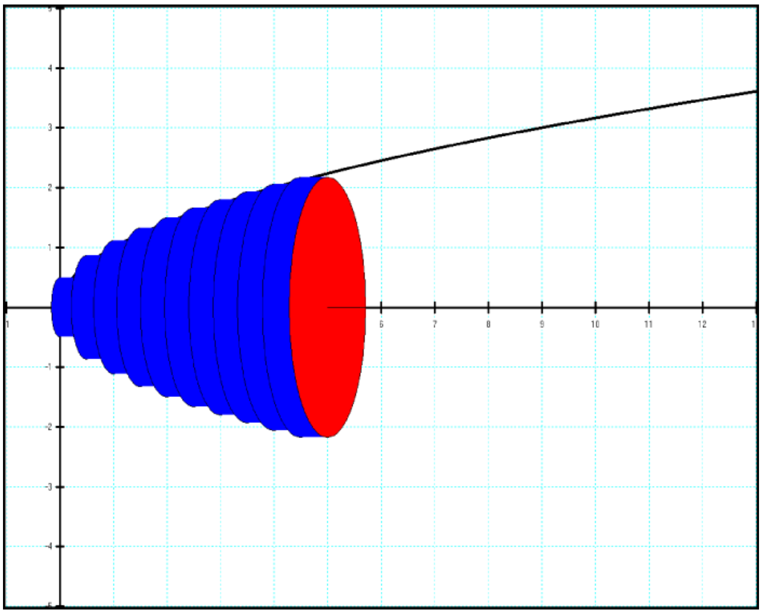
$$\boxed{\mathbf{\overline{G}(a;b) = \int_a^b G(p)dp : (b-a)}}$$

Beispiel : Gleichrichtwert einer sinusförmigen Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \overline{U} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin\omega t \, dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2U_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2U_0}{T} \cdot \frac{2}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2U_0}{\pi}$$

4. Volumenberechnung vom Rotationskörpern

-



Volumen einer Scheibe : $\Delta V = \pi \cdot \left[f(x_{\nu}) \right]^2 \cdot \Delta x$

Gesamtvolumen : $V = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{\nu} \pi \cdot \left[f(x_{\nu}) \right]^2 \cdot \Delta x$

Für das Volumen des Rotationskörpers, der von der Fläche eingeschlossen wird, die entsteht, wenn der Graph einer Funktion f im Bereich [a; b]um die x-Achse rotiert, gilt

$$\boxed{\mathbf{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx}}$$

Beispiel :

Der Graph der Funktion $f : x \rightarrow \sqrt{x}$, $D = [0; 9]$ rotiert um die x-Achse.

Bestimme den Inhalt des Rotationskörpers des von der entstehenden Fläche eingeschlossenen Körpers

Lösung :

$$V = \int_0^a \pi \sqrt{x}^2 dx = \pi \frac{a^2}{2}$$

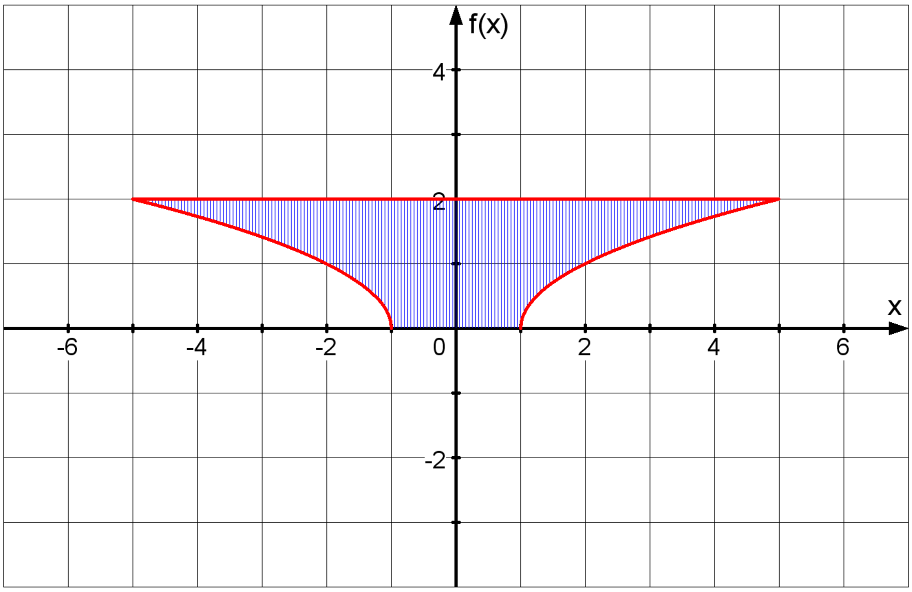
Beachte :

Rotiert der Graph um die y-Achse., dann berechnet man das Rotationsintegral der Umkehrfunktion zwischen den entsprechenden Grenzen.

Beispiel :

Der Graph der Funktion $f : x \rightarrow \sqrt{x-1}$, $D = [1; 5]$ rotiert um die y-Achse.

Bestimme das Volumen des entstehenen Rotationsörpers.



Lösung :

1. Umkehrfunktion :

$$y = \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2 + 1$$

2. Volumen

$$V = \pi \int_0^2 (y^2+1)^2 dy = \pi \int_0^2 (y^4 + 2y^2 + 1)dy = \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} + y \right]_0^2 = 13\frac{11}{15}\pi$$
