Wallis-Produkt, Gammafunktion und n-dimensionale Kugeln

Thomas Peters
Thomas’ Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

26. Oktober 2003

Das Ziel dieses Artikels ist es, Formeln für das Volumen und die Oberfläche von n-dimensionalen Kugeln herzuleiten. Auf diesem Weg wird das Wallis-Produkt berechnet, und einige Eigenschaften der Gauß'schen Gammafunktion werden präsentiert.

Das Wallis-Produkt

Da wir später darauf zurückkommen werden, beginnen wir mit der Berechnung der Integrale

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x.$$

Dazu nehmen wir zunächst $n \geq 2$ an. Partielle Integration und trigonometrischer Pythagoras ergibt

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \,\mathrm{d}x &= \Big[\sin^{n-1} x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Bringen wir den letzten Term auf die andere Seite, so erhalten wir die Rekursionsformel

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x.$$

Da

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^0 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^1 x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

erhält man für gerades $n = 2k$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}$$

und für ungerades $n = 2k+1$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \,\mathrm{d}x = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \prod_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}.$$

Dies ist eigentlich schon alles, was wir für später benötigen. Da wir aber schon so kurz davor sind, gehen wir noch etwas weiter und leiten die erwähnte Produktformel ab.

Da für $0 \le x \le \pi/2$ gilt $0 \le \sin x \le 1$ folgt

$$\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$$

und somit auch

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-1} x \,\mathrm{d}x.$$

Einsetzen der eben abgeleiteten Produktformeln ergibt

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \le \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \le \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1}$$

und Division durch das rechte Produkt

$$\frac{2k}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2-1}{4j^2} \le 1.$$

Weil aber

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k} = 1$$

folgt unmittelbar

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2}{4j^2-1} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2-1}.$$

Dies ist die berühmte *Wallis'sche Produktformel*.

Die Gammafunktion

Als nächsten Schritt leiten wir einige Eigenschaften der Gammafunktion ab. Diese wurde im Artikel über die Fakultät eingeführt als Verallgemeinerung der Fakultät auf die reellen (und komplexen) Zahlen [1]. Sie wurde dort definiert als

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

Ebenso wurde gezeigt, dass sie für $x > 0$ die *Funktionalgleichung*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

[1]Wir betrachten hier ausschließlich reelle x.

erfüllt. Mit $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ folgt daher $\Gamma(x) = (x-1)!$. An der Funktionalgleichung sieht man sofort, dass die Gammafunktion zunächst bei $x = 0$ und dann weiter für alle negativen ganzen Zahlen Pole hat, die sich als ungerade herausstellen. Man erhält nämlich mit der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+2) = \Gamma((x+1)+1) = (x+1)\Gamma(x+1) = (x+1)x\Gamma(x)$$

und allgemein

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots x\Gamma(x).$$

Daran erkennen wir, dass die Gammafunktion bereits durch ihre Werte für $0 < x \leq 1$ vollständig bestimmt ist. Durch Division erhält man

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

woraus man für $x := -n$ die Behauptung über die Polstellen erhält.

Wir setzen unsere Untersuchungen damit fort, dass wir die Definitionsgleichung etwas umformen. Wegen

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

schreiben wir

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t.$$

Nun führt partielle Integration auf

$$\begin{aligned}\int\limits_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int\limits_0^n \frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}(-1)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x}\int\limits_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dieses Integral wird erneut partiell integriert

$$\begin{aligned}\int\limits_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int\limits_0^n \frac{t^{x+1}}{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\left(-\frac{n-1}{n}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\int\limits_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

so dass man für das ursprüngliche Integral

$$\int\limits_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)}\cdot\int\limits_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\,\mathrm{d}t$$

erhält. Nach weiteren $n-2$ partiellen Integrationen ist der störende Term verschwunden, und man hat

$$\begin{aligned}\int\limits_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot\int\limits_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{n^{x+n}}{x+n}\\ &= \frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n)}.\end{aligned}$$

Somit folgt die wichtige *Gauß'sche Produktdarstellung*

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^x}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Wir zeigen nun, dass sie sich direkt aus der *Weierstraß'schen Produktdarstellung*

$$\Gamma(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}$$

mit der *Euler-Mascheroni-Konstanten*

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

ergibt. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}\Gamma(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} &= \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{x/k}\cdot\prod_{k=1}^{n}k\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-\gamma x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{x/k}\cdot n!\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+x}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-\gamma x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot n!\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+x}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right)\right)\cdot n!\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{1+x}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n^x\cdot n!\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+x}\right),\end{aligned}$$

was auch schon die Behauptung ist.

Für die letzte Formel greifen wir auf die *Partialbruchzerlegung des Cotangens*

$$\pi\cot\pi x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}$$

zurück[2]. Hieraus ergibt sich die *Wallis'sche Produktdarstellung des Sinus*[3]

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Durch Differentiation folgt nämlich einerseits

$$\frac{(\sin \pi x)'}{\sin \pi x} = \pi \cot \pi x$$

und andererseits

$$\frac{\left(x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)'}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2x}{k^2} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$

Damit haben wir

$$\frac{(\sin \pi x)'}{\sin \pi x} = \frac{\left(x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)'}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}.$$

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn

$$\left(\frac{\sin \pi x}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}\right)' = 0$$

oder

$$\sin \pi x = Cx \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

gilt. Nun ist jedoch

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$$

und

$$\lim_{x \to 0} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 1,$$

woraus $C = \pi$ und damit die Behauptung folgt.

[2] Für eine Herleitung siehe den Artikel über Fourier-Reihen.

[3] Mit $x = 1/2$ folgt das Ergebnis aus dem letzten Abschnitt.

Die Verbindung zur Gammafunktion lässt sich nun leicht herstellen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^x\cdot n!}\cdot\prod_{k=0}^{n}(x+k)\cdot\frac{1}{n^{1-x}\cdot n!}\cdot\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)\right)\\ &= x\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-x^2}{k^2}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-x}{n}\right)\\ &= x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{\sin\pi x}{\pi}.\end{aligned}$$

Mit $x = 1/2$ folgt $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Es wird sich später als vorteilhaft herausstellen, wenn wir die Werte $\Gamma(n/2+1/2)$ und $\Gamma(n/2+1)$ für natürliches n kennen. Dazu benötigen wir nichts weiter als die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Sei zunächst n gerade. Dann gilt

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}(2j-1)=\sqrt{\pi}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}\frac{2j-1}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=(n/2)!=\prod_{j=1}^{n/2}\frac{2j}{2}.$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Die Formeln stimmen für $n = 2$ wegen

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und $\Gamma(2) = 1$. Nehmen wir nun an, sie gelten für $n-2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{n-1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\\ &= \frac{n-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2-1}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2-1}(2j-1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}(2j-1)\end{aligned}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)!=(n/2)!$$

nach Induktionsvoraussetzung. Sei nun n ungerade. Dann haben wir die Formeln

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{n-1}{2}\right)!=\prod_{j=1}^{(n-1)/2}\frac{2j}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2}} \cdot \prod_{j=1}^{(n+1)/2} (2j-1) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{2j-1}{2}$$

zu zeigen. Diese ergeben sich aber unmittelbar durch die Substitutionen $n \mapsto k-1$ bzw. $n \mapsto k+1$ aus den zuvor Bewiesenen. Es bleibt nur noch, die erste Formel für $n = 1$ zu überprüfen, was aber wegen $0! = 1$ trivial ist[4].

Volumen und Oberfläche der Kugel im $\mathbb{R}^n$

Allgemein ist die (euklidische) n-dimensionale Kugel mit Radius r definiert als

$$K_n(r) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq r^2 \right\}.$$

In den bekannten Fällen $n = 1$ erhält man das Intervall $[-r, r]$ mit Länge $V_1(r) = 2r$, für $n = 2$ den Kreis mit Fläche $V_2(r) = \pi r^2$ und für $n = 3$ schließlich die Kugel mit Volumen $V_3(r) = 4/3\pi r^3$. Es ist erstmal kein Zusammenhang zwischen n und dem n-dimensionalen Volumen $V_n(r)$ zu erkennen. Dennoch gibt es eine geschlossene Formel. Diese lautet

$$V_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot r^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \cdot r^n.$$

Wir sehen sofort, dass sie für die uns bekannten Fälle das richtige Ergebnis liefert. Wir gehen nun daran, sie durch Induktion zu beweisen. Zunächst bemerken wir, dass aus Symmetriegründen $V_n(r) = r^n V_n(1)$ gilt und es somit genügt, sich auf das Volumen der Einheitskugel zu beschränken. Sei die Formel also für $n-1$ richtig. Die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ liegt zwischen $x_n = -1$ und $x_n = 1$. Die Ebenen $x_n = \mathrm{const.}$ schneiden sich daher im Bereich $-1 < x_n < 1$ mit $K_n(1)$ in einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel mit Radius $\sqrt{1-x_n^2}$. Das Volumen dieser Kugel ist nach Induktionsvoraussetzung

$$V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2}) = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot (1-x_n^2)^{(n-1)/2}.$$

Das Volumen der Einheitskugel ist nun einfach

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})\, \mathrm{d}x_n = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}x_n.$$

Man findet mit der Substitution $x_n = \cos t$

$$\int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}x_n = \int_{\pi}^{0} \sin^{n-1} t(-\sin t)\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \sin^n t\, \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^n t\, \mathrm{d}t.$$

[4]Das leere Produkt ist per Definition 1.

Dieses Integral haben wir aber zuvor berechnet. Es lautet für gerades n

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j-1}{2j}$$

und für ungerades n

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t = \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{2j}{2j+1}.$$

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts können wir diese Formeln in der Gleichung

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

für beliebiges n vereinen. Damit folgt für das Volumen

$$V_n(1) = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 2\pi^{n/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Nun sind wir auch schon fast am Ziel. Wir schreiben nur noch

$$\begin{aligned}(n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) &= (n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\end{aligned}$$

und erhalten somit das gewünschte Ergebnis

$$V_n(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

Analytische Werte bis $n = 10$ und die numerischen Werte für die Einheitskugel sind in Tabelle 1.1 angegeben. Machen wir uns nun den Spaß und tragen $V_n(1)$ über reellem n auf, so erhalten wir die Kurve aus Abbildung 1.1. Man erkennt ein Maximum bei $n \approx 5{,}26$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_n(r)$	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{\pi^2}{2}r^4$	$\frac{8\pi^2}{15}r^5$	$\frac{\pi^3}{6}r^6$	$\frac{16\pi^3}{105}r^7$	$\frac{\pi^4}{24}r^8$	$\frac{32\pi^4}{945}r^9$	$\frac{1}{120}r^{10}$
$V_n(1)$	2,00	3,14	4,19	4,93	5,26	5,17	4,72	4,06	3,30	2,55

Tabelle 1.1: Das Volumen $V_n(r)$ der n-dimensionalen Kugel.

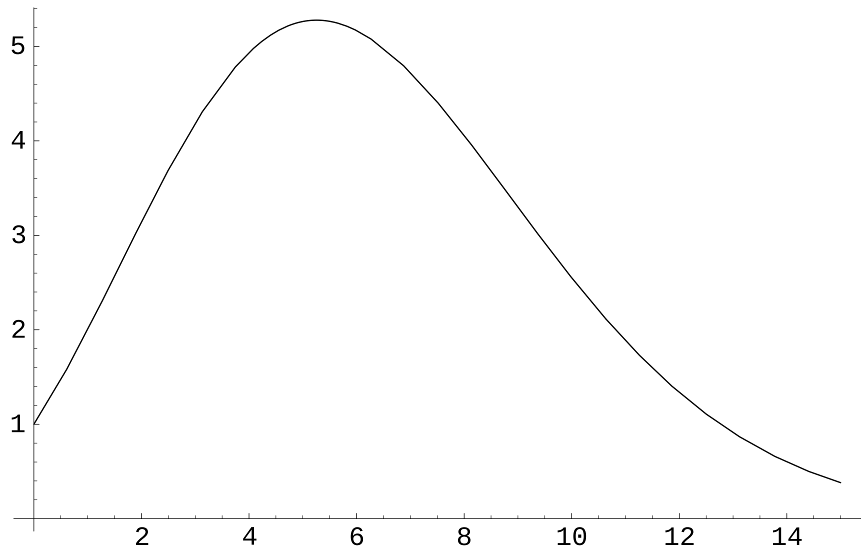

Abbildung 1.1: Das Volumen $V_n(1)$ der Einheitskugel über n.

Es ist jedoch überraschend, dass das Volumen bei wachsendem n immer kleiner wird. Tatsächlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_n(1) = 0.$$

Wir zeigen dies mit Hilfe der *Stirling-Formel*[5]

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Damit kann man das Volumen nämlich ganz grob folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \sim \frac{2\pi^{n/2}}{n\sqrt{\pi(n-1)}}\left(\frac{2\mathrm{e}}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \leq \frac{2\cdot 4^{n/2}}{n\sqrt{n-1}}\left(\frac{2\cdot 4}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}^{2+2n+(n-1)+(2n-2)}}{n\sqrt{n-1}^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{2}^{5n-1}}{\sqrt{n-1}^n}. \end{aligned}$$

Dies geht aber gegen 0, da der erste Faktor gegen 0 geht und für den zweiten Faktor die Abschätzung

$$\begin{aligned} && \sqrt{2}^{5n-1} &\leq \sqrt{n-1}^n \\ \Leftrightarrow && (5n-1)\ln\sqrt{2} &\leq n\ln\sqrt{n-1} \\ \Leftrightarrow && \ln\sqrt{2} &\leq \frac{n}{5n-1}\ln\sqrt{n-1} \end{aligned}$$

[5]Die Stirling-Formel wird im Aritkel über die Fakultät hergeleitet.

für hinreichend große n gilt.

Kommen wir nun zur Oberfläche $O_n(r)$ der n-dimensionalen Kugel. Die Berechnung der Oberfläche lässt sich wegen

$$V_n(r) = \int_0^r O_n(t)\,\mathrm{d}t$$

auf das bereits gelöste Problem für das Volumen zurückführen. Und zwar erhält man

$$O_n(r) = \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot r^{n-1}.$$

Die ersten 10 Werte sind in Tabelle 1.2 zusammengestellt. Den kontinuierlichen Graphen zeigt Abbildung 1.2. Das Maximum hat sich auf $n \approx 7{,}26$ verschoben. Am asymptotischen Verhalten ändert sich jedoch nichts, d. h. es gilt ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} O_n(1) = 0.$$

Der Beweis wird als Übungsaufgabe empfohlen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$O_n(r)$	2	$2\pi r$	$4\pi r^2$	$2\pi^2 r^3$	$\frac{8\pi^2}{3} r^4$	$\pi^3 r^5$	$\frac{16\pi^3}{15} r^6$	$\frac{\pi^4}{3} r^7$	$\frac{32\pi^4}{105} r^8$	$\frac{\pi^5}{12} r^9$
$O_n(1)$	2,00	6,28	12,57	19,74	26,32	31,01	33,07	32,47	29,69	25,50

Tabelle 1.2: Die Oberfläche $O_n(r)$ der n-dimensionalen Kugel.

Rechnung mit Kugelkoordinaten

Man kann die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel schneller ausrechnen, wenn man Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ einführt. Wie man das konkret macht, braucht uns dabei für diese Zwecke nicht einmal zu interessieren, es reicht zu wissen, dass es geht.

Es bezeichne $|x|$ den euklidischen Betrag

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten nun die Integrale I_n in kartesischen

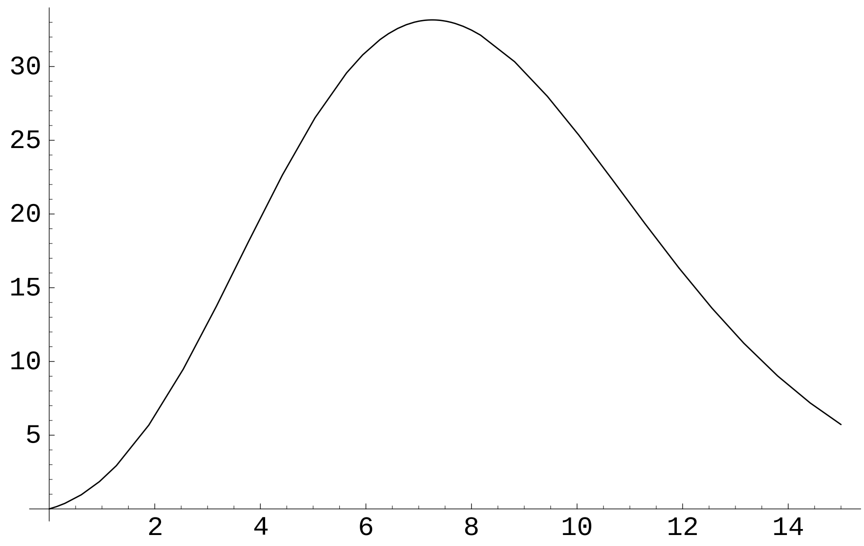

Abbildung 1.2: Die Oberfläche $O_n(1)$ der Einheitskugel über n.

Koordinaten

$$
\begin{aligned}
I_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{x_n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{x_n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2} \cdots \mathrm{e}^{-x_n^2}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\right) \cdots \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_n^2}\,\mathrm{d}x_n\right) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1\right)^n = I_1^n
\end{aligned}
$$

und in Kugelkoordinaten

$$
I_n = \int\limits_{r=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{S}_n} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega_n,
$$

wobei $\mathbb{S}_n$ die n-Sphäre und Ω_n den Raumwinkel im $\mathbb{R}^n$ bezeichent. Nun ist

$$
O_n(1) = \int\limits_{\mathbb{S}_n} \mathrm{d}\Omega_n
$$

und somit

$$
I_n = O_n(1) \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r.
$$

Mit der Substitution $t = r^2$ wird

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{(n-1)/2} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{n/2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n/2)}{2}$$

und daher

$$I_n = O_n(1)\frac{\Gamma(n/2)}{2}.$$

Wegen $\Gamma(1) = 1$ und $O_2(1) = 2\pi$ ist nun $I_1 = \sqrt{I_2} = \sqrt{\pi}$. Damit haben wir auch schon das Ergebnis

$$O_n(1) = \frac{2}{\Gamma(n/2)} I_n = \frac{2}{\Gamma(n/2)} I_1^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$