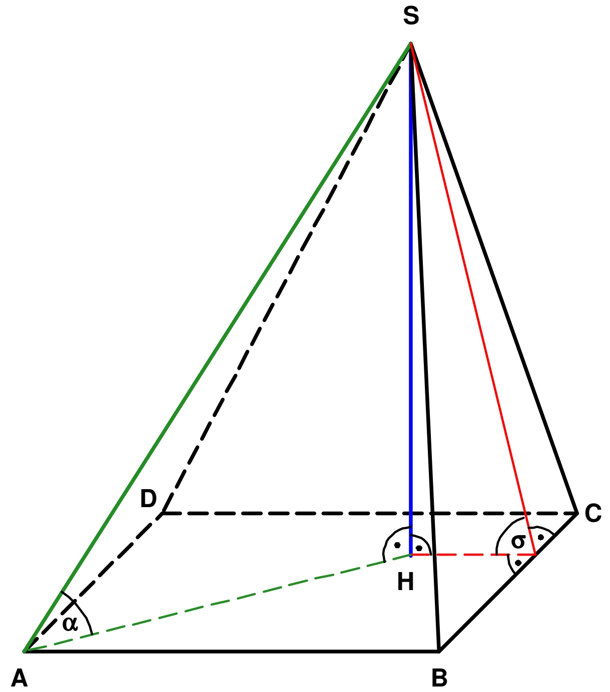
X. Geometrische Körper

===

10.1. Die Pyramide



Definition :

Verbindet man die Ecken eines ebenen Vielecks mit einem nicht in der Vielecksebene liegenden Punkt S, dann bilden diese Verbindungsstrecken zusammen mit den Seiten des Vielecks die Kanten einer **Pyramide**.

Bezeichnungen :

Das Vieleck ABCD(...) heißt **Grundfläche** der Pyramide und seine Seiten [AB], [BC], ... sind die **Grundkanten** der Pyramide.

Den Punkt S bezeichnet man als **Spitze** der Pyramide.

Die Lotstrecke von der Spitze S der Pyramide auf die Grundflächenebene bzw. die Länge dieser Lotstrecke heißt **Höhe** der Pyramide. Ist H der Höhenfußpunkt, dann ist

$$\boxed{\mathbf{h = \overline{SH} = d(S\,;\,ABC)}}.$$

Ist G der **Flächeninhalt** der Grundfläche einer Pyramide, dann gilt für deren Rauminhalt V :

$$\boxed{\mathbf{V = \frac{1}{3}\,G \cdot h}}$$

Die Strecken [AS], [BS], ... heißen die **Seitenkanten** der Pyramide.

Der Winkel, den eine Seitenkante mit der Grundflächenebene bildet; heißt **Neigungswinkel** dieser Seitenkante gegen die Grundfläche.

Im Bild ist α der Neigungswinkel der Seitenkante [AS] gegen die Grundfläche.

Der Winkel, den eine Seitenflächenebene mit der Grundflächenebene bildet; heißt **Neigungswinkel** dieser Seitenfäche gegen die Grundfläche.

Im Bild ist σ der Neigungswinkel der Seitenfläche BCS gegen die Grundfläche.

Spezielle Pyramiden

a) Eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche heißt **Tetraeder**.

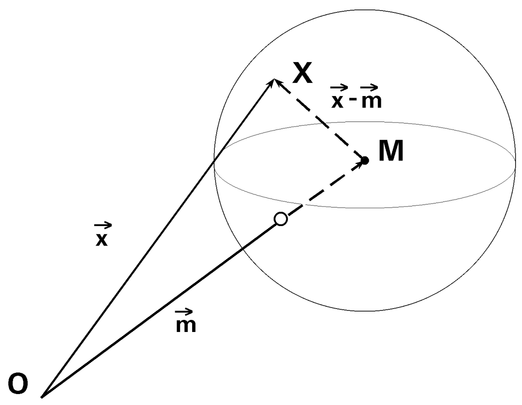
b) Ein Pyramide heißt **gerade**, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind. Die Grundfläche besitzt dann einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Höhenfußpunkt ist.

c) Eine gerade Pyramide mit einem regelmäßigen Vieleck als Grundfläche heißt **regelmäßige Pyramide**.

Ein regelmäßiges Tetraeder ist daher eine Pyramide, die von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, und damit einer der fünf **Platonischen Körper**.

Die vier anderen Platonischen Körper sind **Würfel**, **Oktaeder**, **Dodekaeder** und **Ikosaeder**.

10.2 Die Kugel



Die **Kugel**(**fläche**) k(M ; r) mit dem **Radius r** und dem **Mittelpunkt M** ist der geometrische Ort aller Punkte; die von M die Entfernung r haben.

Der Punkt X liegt genau dann auf dieser Kugel, wenn für seinen Ortsvektor $\vec{x}$ und den Ortsvektor $\vec{m}$ des Mittelpunktes gilt

$$\left| \vec{x} - \vec{m} \right| = r \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$$

Die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 des Punktes X müssen also die Gleichung

$$\boxed{\mathbf{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2}}$$

erfüllen. Man nennt eine derartige Gleichung daher **Kugelgleichung**.

Beispiel :

Die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 3x_2 = 0$ erfüllen, bilden eine Kugel, denn mit quadratischer Ergänzung folgt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 3x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1{,}5)^2 + (x_3 - 0)^2 = 6{,}25$$

und das ist die Gleichung einer Kugel mit $M\left(2 \,\middle|\, -1{,}5 \,\middle|\, 0\right)$ und $r = 2{,}5$.

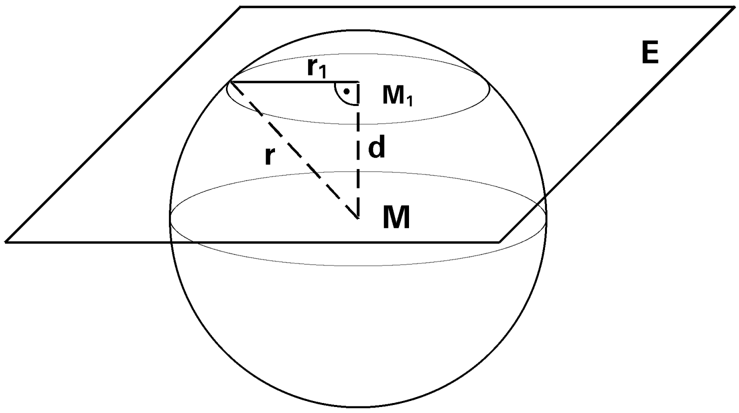
Anwendungen :

1. Lagebeziehung zwischen einer Kugel k und einer Ebene E

Ist r der Radius der Kugel und d = d(M ; E) ihr Abstand von der Ebene E, dann gilt

a) $\boxed{\mathbf{d > r}}$: Kugel und Ebene haben keinen gemeinsamen Punkt.

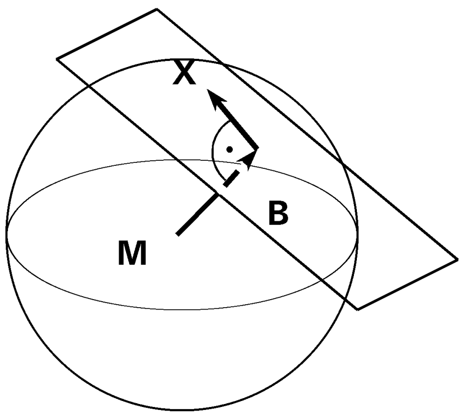
b) $\boxed{\mathbf{d < r}}$: Kugel und Ebene schneiden sich in einem Kreis.



Für den Radius r_1 dieses Kreises gilt : $r_1^2 = r^2 - d^2$.

Sein Mittelpunkt M_1 ist der Fußpunkt des Lotes von M auf die Ebene E.

c) $\boxed{\mathbf{d = r}}$: Kugel und Ebene berühren sich in einem Punkt B.



Dieser Berührpunkt B ist der Fußpunkt des Lotes von M auf die Ebene E.

Die Ebene E heißt **Tangentialebene** an die Kugel mit dem Berührpunkt B.

2. Lagebeziehung zwischen einer Kugel k und einer Geraden g

Ist r der Radius der Kugel und $d = d(M\,;\,g)$ ihr Abstand von der Geraden g, dann gilt

a) $\boxed{\mathbf{d > r}}$: Kugel und Gerade haben keinen gemeinsamen Punkt.

b) $\boxed{\mathbf{d < r}}$: Kugel und Gerade schneiden sich in zwei Punkten.

Die beiden Schnittpunkte ergeben sich aus der Bedingung $\left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$ mit $X \in g$.