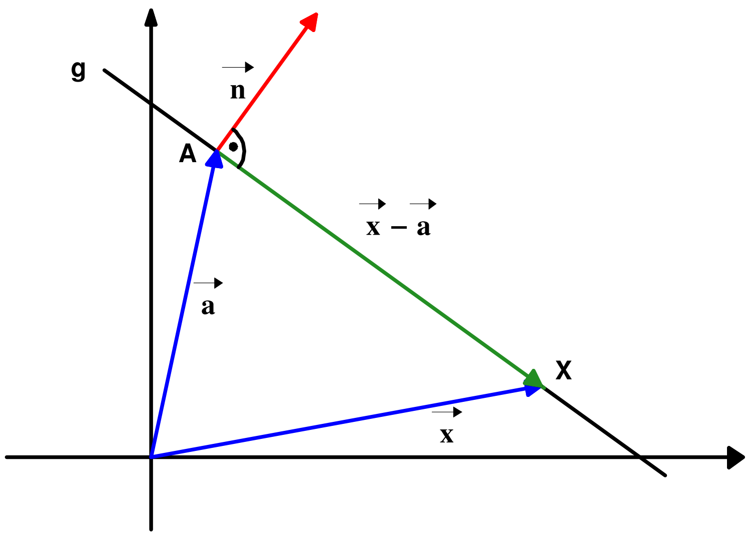
IX. Normalformen

==

9.1 Die Normalenform einer Geradengleichung im 2-dimensionalen Punktraum

----



Parameterform : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$

Umformung : $\vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \Big| \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0$

In Koordinaten : $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + \underbrace{(-n_1 a_1 - n_2 a_2)}_{n_4} = 0$

Satz :
Genau dann liegt ein Punkt $X(x_1|x_2)$ des zweidimensionalen euklidischen Punktraums auf einer Geraden mit der Parameterform

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}},$$

wenn für seinen Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\boxed{\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_1) = 0} \; (*) \Leftrightarrow \lambda$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ ist ein **Normalenvektor** zur Geraden, d.h. $\vec{n} \perp \vec{v}$

Man nennt deshalb die Gleichung (*) eine **Normalenform** der Geraden.

Beispiel :

Parameterform : $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

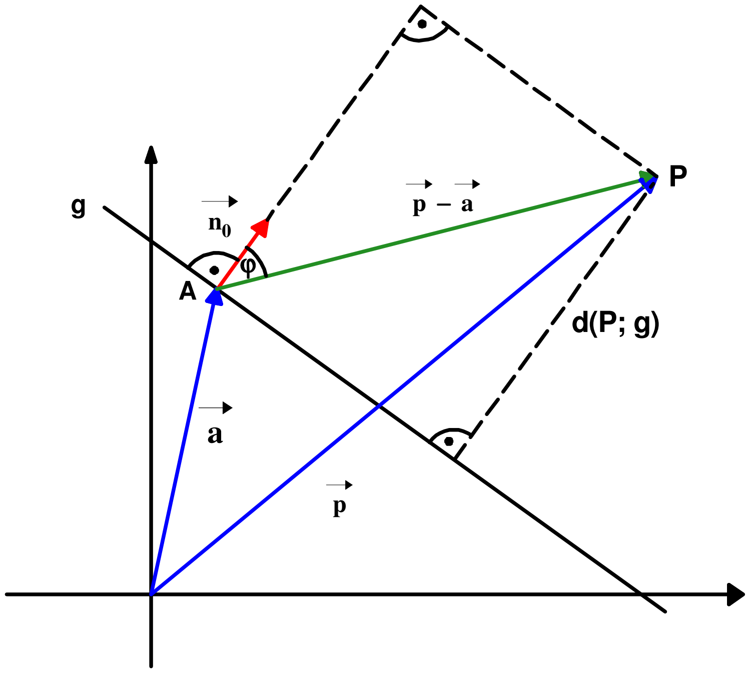
Normalenvektor : $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenform : $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow$

$$-5x_1 + 2x_2 - (-5) \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow -5x_1 + 2x_2 + 8 = 0$$

$B\left(3 \,\middle|\, 4\right)$ liegt nicht auf g, denn B in g : $-5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 8 = 1 \neq 0 \Rightarrow B \notin g$

9.2 Die HESSEform einer Geraden



Es ist

$$\left| \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{p} - \vec{a} \right) \right| = \left| 1 \cdot \left| \vec{p} - \vec{a} \right| \cdot \cos \varphi \right| = d(P\,;\,g)$$

Definition und Satz :

Wählt man als Normalenvektor für die Normalenform einer Geraden g den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$, der vom Ursprung des Kooordinatensystems wegzeigt, dann heißt die so erhaltene Normalenform die **HESSEsche Normalenform HNF** der Geraden

$$\boxed{\vec{n}_0 \cdot \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n_{01}x_1 + n_{02}x_2 + \underbrace{(-n_{01}a_1 - n_{02}a_2)}_{n_{04}} = 0}$$

Das Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Punktes P in die Hesseform ergibt eine Zahl, deren Zahl, deren Betrag, gleich dem Abstand des Punktes P von der Geraden g ist.

Diese Zahl ist

a) positiv, wenn P und und der Ursprung auf verschiedenen Seiten von g liegen.

b) negativ, wenn P auf der Ursprungsseite von g liegt.

Bemerkung :

Zeigt $\vec{n_0}$ vom Ursprung des Koordinatensystems weg, dann ist $\vec{n_0} \cdot \vec{a} > 0$, d. h.

die Konstante n_4 in der Hesseform ist negativ.

Beispiel :

Parameterform : $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Einheitsnormalenvektor : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt $\vec{n_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$

HNF : $\pm \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow$

$$\mathbf{\frac{4}{5} x_1 - \frac{3}{5} x_2 - \frac{1}{5} = 0}$$

Der Abstand des Punktes $P\left(1 \,\middle|\, -3\right)$ von g ergibt sich dann zu

$$d(P; g) = \left| \frac{4}{5} \cdot 1 - \frac{3}{5} \cdot (-3) - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{12}{5} \right| = 2{,}4$$

und P liegt auf der ursprungsfernen Seite von g.

Liegt bereits eine Normalenform vor, dann erleichtert dies die Bestimmung der HNF.

Beispiel :

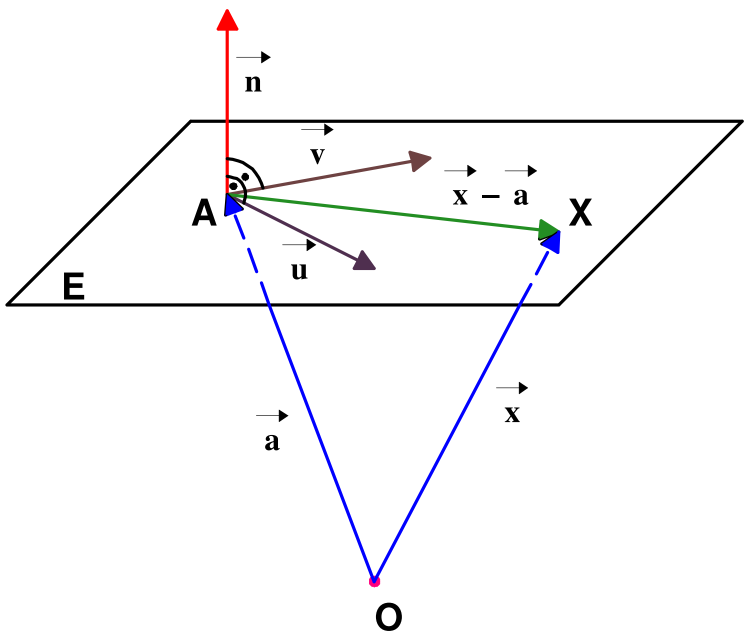
g : $12x_1 - 5x_2 + 1 = 0$

HNF : $\frac{12x_1 - 5x_2 + 1}{-\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{12}{13} x_1 + \frac{5}{13} x_2 - \frac{1}{13} = 0$

Allgemein gilt also :

Normalengleichung	**HNF**
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_4 = 0$	$\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_4}{-\operatorname{sgn}(n_4)\cdot\sqrt{n_1^2+n_2^2}} = 0$

9.3 Die Normalenform einer Ebenengleichung im 3-dimensionalen Punktraum



Ebenengleichung in Parameterform : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u}$

Umformung : $\vec{x} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{u} \quad \Big| \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

In Koordinaten :

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \underbrace{(-n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3)}_{n_4} = 0$$

Satz :

Genau dann liegt ein Punkt $X\left(x_1 \,\middle|\, x_2 \,\middle|\, x_3\right)$ auf einer Ebene mit der Parameterform

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\mu} \cdot \vec{\mathbf{u}}},$$

wenn für seinen Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}} \cdot \left(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{a}} \right) = \mathbf{0}}$$

In Koordinaten ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3) = 0}}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zur Geraden, d.h. $\vec{n} \perp \vec{v}$, $\vec{n} \perp \vec{u}$

Man nennt diese Gleichung deshalb auch eine **Normalenform** der Ebene.

Bemerkung :

Die Normalenform einer Ebene in einem kartesischem Koordinatensystem stimmt mit Koordinatengleichung einer Ebene in einem affinen Koordinatensystem überein.

Beispiel :

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Möglichkeiten, eine Normalenform der Ebene E zu bestimmen :

a) Determinantenmethode

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 2 & 5 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x_1 + 1 - 5x_2 - 5x_3 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 1 = 0$$

b) Bestimmung eines Normalenvektors mit dem Skalarprodukt

Ansatz : $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Bedingungen :

$$(1) \left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2n_1 + n_2 - n_3 = 0 \right. \quad (2) \left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5n_1 - n_3 = 0 \right.$$

$$(1) - (2) \left| \; -3n_1 + n_2 = 0 \right.$$

$$\text{Parametrisierung} \left| \; x_1 = k \quad \Rightarrow \quad n_2 = 3k \right.$$

$$\text{in (1)} \left| \; 2k + 3k - n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_3 = 5k \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} k \\ 3k \\ 5k \end{pmatrix} \right.$$

Speziell für $k = 1$ erhält man den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dies ergibt als Normalenform von E : $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 =$

c) Bestimmung eines Normalenvektors mit dem Vektorprodukt

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und dann weiter wie unter b).

Beachte :

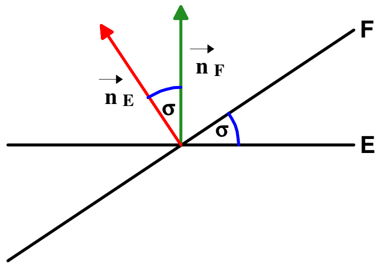
Ein Normalenvektor zu einer Ebene ist bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt.

Man wählt ihn so, dass seine Koordinaten vom Betrag her möglichst klein sind.

9.4 Anwendungen :

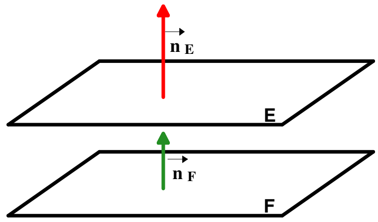
---

1. Schnittwinkel zweier Ebenen



Der Winkel, unter dem sich zwei Ebenen schneiden, ist gleich dem Winkel, den zwei ihrer Normalenvektoren miteinander bilden.

Sonderfälle :



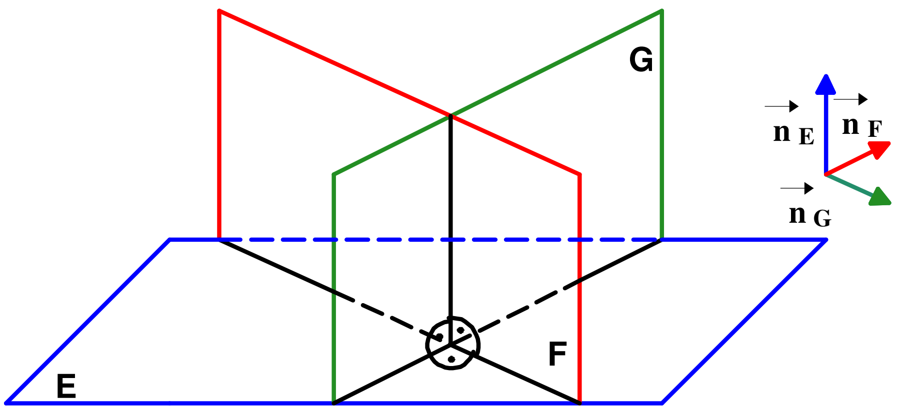
Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn ihre Normalenvektoren parallel (kollinear) sind.

Beispiel :

Für den Winkel σ, den die Ebenen E : $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ und F : $3x_1 - 4x_2 + 1 = 0$ miteinander bilden, gilt :

$$\cos\sigma = \left| \frac{2\cdot 3 + 2\cdot(-4) + 1\cdot 0}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}} \right| = \frac{2}{15} \Rightarrow \sigma \approx 82{,}4°,$$

während F und G : $6x_1 - 8x_2 - 1 = 0$ parallel sind.



Zwei Ebenen stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn auch ihre Normalenvektoren aufeinander senkrecht stehen.

Im Bild : E ⊥ F ⊥ G

Bemerkung :

Durch einen Punkt einer Ebene E gehen unendlich viele zu E senkrechte Ebenen.

Beispiel :

Gesucht ist die Ebene G, die senkrecht zu den Ebenen

$E: x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0$ und $F: 2x_1 + x_3 + 1 = 0$

verläuft und durch den Punkt $P(-1|\,0|\,2)$ geht.

Lösung :

1. Es ist

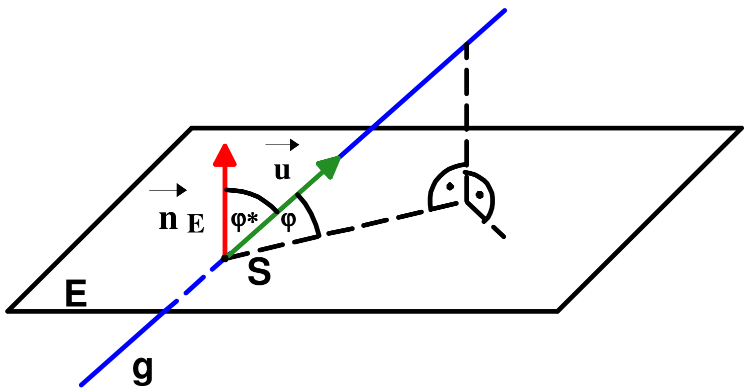
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor von G und damit $-2x_1 + x_2 + 4x_3 + n_4 = 0$ eine Normalenform von G.

2. Einsetzen von P ergibt $n_4 = -10$.

---

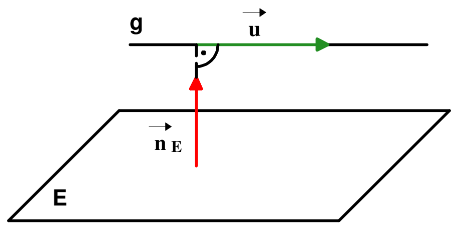
2. Schnittwinkel zwischen Ebene und Gerade



Der Schnittwinkel, unter dem eine Gerade eine Ebene schneidet, ist gleich dem Komplement des spitzen Winkels, den der Richtungsvektor der Geraden mit einem Normalenvektor der Ebene bildet.

$$\boxed{\varphi = 90° - \measuredangle(\vec{u}\,,\,\vec{n}) = 90° - \varphi^*}$$

Sonderfälle :



Eine Gerade

$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

ist genau dann zu einer Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}_E$ parallel, wenn der Richtungsvektor von g auf dem Normalenvektor $\vec{n}_E$ von E senkrecht steht.

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_E = \mathbf{0}}$$

Eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ ist genau dann ein Lot zur Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}_E$, wenn ihr Richtungsvektor $\vec{u}$ parallel zu $\vec{n}_E$ ist.

Beispiel :

Für das Komplement φ^* des Schnittwinkels φ der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der

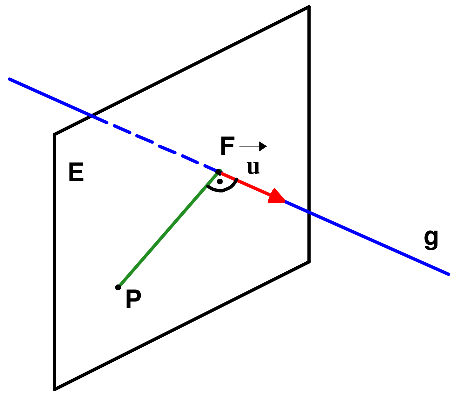
Ebene $E: x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1 = 0$ gilt :

$$\cos \varphi^* = \left| \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{1}{9}$$

Also $\varphi = 90° - \varphi^* \approx 6{,}3°$

---

3. Abstand eines Punktes von einer Geraden



Man legt durch P eine Ebene E, die zur Geraden g senkrecht verläuft. Als Normalenvektor von E kann der Richtungsvektor von g dienen.

Der Schnitt von E und g ergibt den Fußpunkt F des Lotes von P auf g. Also

$$\boxed{d(P;\, g) \;=\; \overline{PF} \;=\; |\,\overrightarrow{PF}\,|}$$

Beispiel :

Gesucht ist der Abstand des Punktes $P\left(1\,\middle|\,2\,\middle|\,0\right)$ von der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung :

1. Ansatz für die Lotebene E durch P zu g : $x_1 + 2x_2 - x_3 + n_4 = 0$

2. P eingesetzt ergibt $n_4 = -5$ und damit $E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$

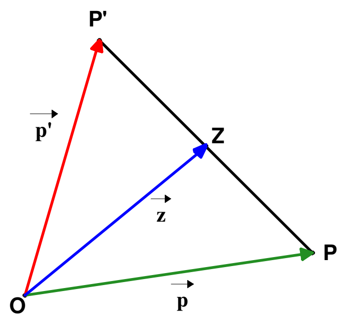
3. $g \cap E$ ergibt den Lotfußpunkt $F\left(2\,\middle|\,1\,\middle|\,-1\right)$

4. Damit ist $d(P\,;\,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{6}$

----

4. Spiegelungsaufgaben

a) Spiegelung an einem Punkt



Da Z die Strecke [PP'] halbiert, ergibt sich $\boxed{\vec{p}\,' = \vec{p} + 2\cdot\overrightarrow{PZ} = 2\cdot\vec{z} - \vec{p}}$

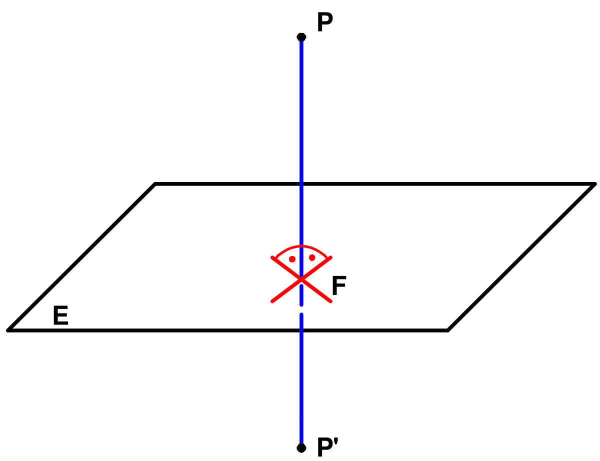
Beispiel :

$P\left(1 \,\middle|\, -2 \,\middle|\, 3\right)$ an $Z\left(1 \,\middle|\, -1 \,\middle|\, 2\right)$ gespiegelt, ergibt

$$\vec{p}\,' = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

d. h. $P'\left(1 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 1\right)$

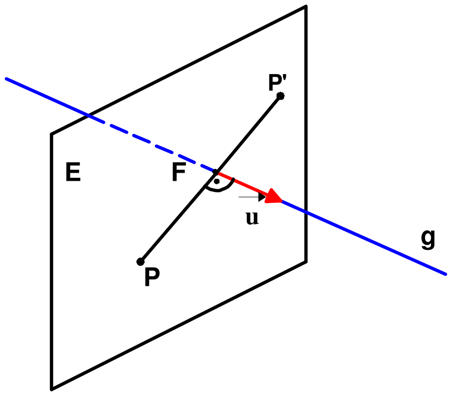
b) Spiegelung an einer Ebene



Man legt durch P die Lotgerade zur Ebene E und ermittelt durch Schnitt den Lotfuß-punkt F. Es gilt dann

$$\boxed{\vec{p}\,' = \vec{p} + 2\cdot\overrightarrow{PF} = 2\cdot\vec{f} - \vec{p}}$$

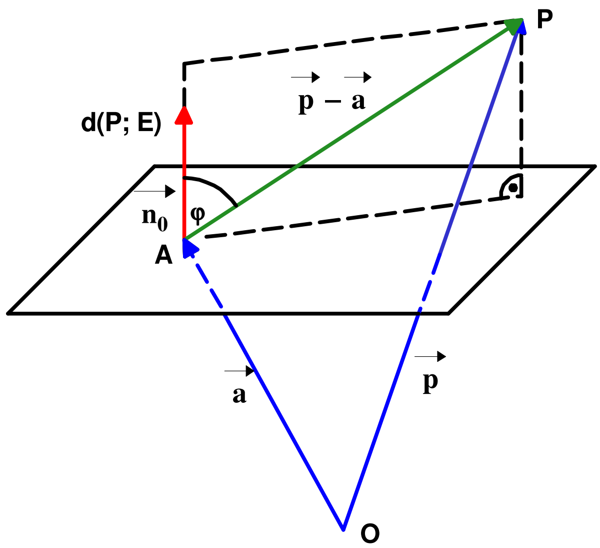
c) Spiegelung an einer Geraden



Man legt durch den zu spiegelnden Punkt eine Ebene E senkrecht zur Spiegelachse g. Der Lotfußpunkt F ist dann der Schnitt von g mit E. Es gilt dann

$$\boxed{\vec{p'} = \vec{p} + 2\cdot\overrightarrow{PF} = 2\cdot\vec{f} - \vec{p}}$$

9.5 Die HESSEform einer Ebene



$$\left| \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{p} - \vec{a} \right) \right| = \left| 1 \cdot \left| \vec{p} - \vec{a} \right| \cdot \cos \varphi \right| = d(P\,;E)$$

Definition und Satz :

Wählt man als Normalenvektor für die Normalenform einer Ebene E den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_0$, der vom Ursprung des Kooordinatensystems weg zeigt, dann heißt die so erhaltene Normalenform die **HESSEsche Normalenform HNF** der Ebene.

$$\boxed{\vec{n}_0 \cdot \left(\vec{x} - \vec{a} \right) = 0} \qquad n_{01}x_1 + n_{02}x_2 + n_{03}x_3 + \underbrace{(-n_{01}a_1 - n_{02}a_2 - n_{03}a_3)}_{n_{04}} = 0$$

Das Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Punktes P in die Hesseform ergibt eine Zahl, deren Betrag gleich dem Abstand des Punktes P von der Ebene E ist.

Diese Zahl ist

a) positiv, wenn P und und der Ursprung auf verschiedenen Seiten von E liegen.

b) negativ, wenn P auf der Ursprungsseite von E liegt.

Bemerkung :

Zeigt $\vec{n}_0$ vom Ursprung des Koordinatensystems weg, dann ist $\vec{n}_0 \cdot \vec{a} > 0$, d.h. die Konstante n_4 in der Hesseform ist negativ.

Beispiel :

E : $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 = 0$

HNF : $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3}{-\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - 1 = 0}$

Normalengleichung	**HNF**
$\mathbf{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0}$ mit $n_4 = -(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)$	$\mathbf{\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4}{\pm\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} = 0}$

Beispiel :

E : $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 = 0 \quad P\left(3 \,\middle|\, -3 \,\middle|\, 3\right)$

$$d(P; E) = \left|\frac{2\cdot3 - (-3) + 2\cdot3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}\right| = |5| = 5$$

P liegt nicht auf der Ursprungsseite von E.

Anwendungen :

1. Geometrische Örter - Abstandsmethode

Beispiel :

Gegeben : E : $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$ F : $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 = 0$

Bestimme die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen-

Lösung :

Die winkelhalbierenden Ebenen von E und F bilden den geometrischen Ort aller Punkte die von E und F gleich weit entfernt sind.

Ist $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ also ein Punkt auf der winkelhalbierenden Ebenen, dann gilt

$$\left| \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3} \right| = \left| -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3} \right|$$

Also

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}$$

oder

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3} = -(-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3})$$

$$\frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3} = 0 \vee -\frac{2}{3}x_2 - 1 = 0$$

$$W_1 : 4x_1 + 4x_2 + 3 = 0 \quad W_2 : 2x_2 + 3 = 0$$

Satz :

Die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen zu zwei Ebenen E und F erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der HNF's dieser Ebenen.

Die Mittenebene zu zwei parallelen Ebenen E und F ist der geometrische Ort aller Punkte die von E und F gleich weit entfernt sind. Man erhält daher analog

Satz :

Die Gleichungen der Mittenebene zu zwei parallelen Ebenen E und F erhält man durch Addition der HNF's dieser Ebenen.

2. Bestimmung des Abstandes zweier windschiefen Geraden

Lösungsstrategie :

Man legt durch eine Gerade die Ebene parallel zur anderen und bestimmt den Abstand dieser Geraden von der Ebene etwa durch Einsetzen ihres Aufpunkts in die HNF der Ebene.