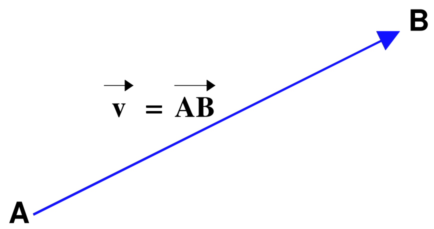
VII. Längen und Winkel

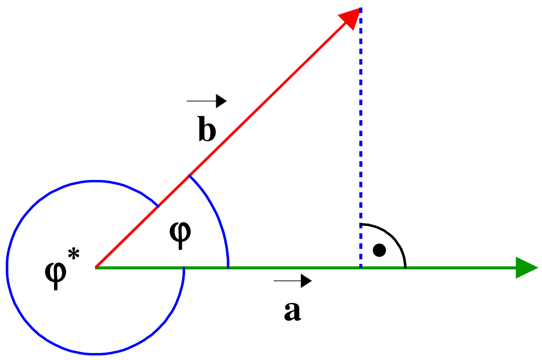
==

7.1 Das Skalarprodukt geometrischer Vektoren



Unter dem Betrag $\left|\vec{v}\right|$ bzw. der Länge eines Vektors $\vec{v}$ des geometrischen Vektorraums versteht man die Länge eines Repräsentanten.

$$\boxed{\mathbf{v} := \left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \overline{\mathbf{AB}}}$$



Definition :

Das **Skalarprodukt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier geometrischer Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Zahl

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos\varphi = a \cdot b \cdot \cos\varphi^*},$$

wobei $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ der nicht überstumpfe Winkel ist, der von zwei ihrer Repräsentanten mit gemeinsamen Anfangspunkt eingeschlossen wird.

Beispiel :

Ist $\left|\vec{a}\right| = a = 3{,}5 \quad \left|\vec{b}\right| = b = 3$ und $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi = 120°$.

dann gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi = 3{,}5 \cdot 3 \cdot \cos 120° = -5{,}25$

Sind $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$. dann gilt

$\varphi = 0°$	$0° < \varphi < 90°$	$\varphi = 90°$	$90° < \varphi < 180°$	$180°$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b$	$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -a \cdot b$

Anwendungen :

1. Zueinander senkrechte (orthogonale) Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{o}$ stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr skalares Produkt gleich Null ist

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0, \quad \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{o}}}$$

2. Betrag (Länge) eines Vektors

Es ist $\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cdot \cos 0° = a^2$ und damit

$$\boxed{\mathbf{a} = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}} = \sqrt{\vec{\mathbf{a}}^{\,2}}}$$

3. Einheitsvektoren

haben den Betrag 1.

Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$ gibt es einen gleichgerichteten Einheitsvektor $\vec{a_0}$. Man erhält ihn mit

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

4. Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den von zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ eingeschlossenen, nicht überstumpfen Winkel

$\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ gilt

$$\boxed{\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0}$$

Rechengesetze für das Skalarprodukt

(1)	$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$	**Kommutativgesetz**
(2)	$\boxed{(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}$, $\lambda \in \mathbb{R}$	**Assoziativgesetz**
(3)	$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}}$	**Distributivgesetz**

7.2 Das Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise

Definition :

Eine Basis $\left\{ \vec{e}_1 \;,\; \vec{e}_2 \;,\; < \vec{e}_3 > \right\}$ heißt **orthonormiert** oder **Orthonormalbasis ONB** eines zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraums, wenn

a) die Länge jedes Basisvektors 1 ist d. h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ (i = 1, 2, 3).

b) die Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen d. h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \;\; (1 \le i, j \le 3, i \ne j)$.

Sind dann $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellungen zweier Vektoren bzgl. einer orthonormierten Basis im dreidimensionalen geometrischen Vektorraum, dann gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3 \right) \cdot \left(b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3 \right) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

weil $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ (i = 1, 2, 3) und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \;\; (1 \le i, j \le 3, i \ne j)$.

Man schreibt

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \end{pmatrix} = \mathbf{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}}$$

Anwendungen :

Bzgl. einer orthonormierten Basis gilt für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

1. $\boxed{\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0}}$

Beispiel :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{denn } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2-2+4 = 0$$

2. $\boxed{\left| \vec{\mathbf{a}} \right| = \sqrt{\mathbf{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}}$

Beispiel :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \vec{\mathbf{a}} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

3. $\boxed{\vec{\mathbf{a_0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{pmatrix}}$

Beispiel :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

4. $\boxed{\mathbf{\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \vec{a} \cdot \vec{b_0} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_1^2 + a_3^2}}}}$

Beispiel :

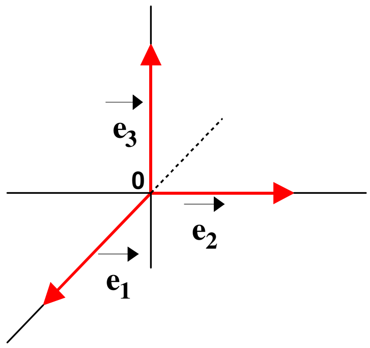
Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist

$$\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{-1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 2\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{5}{3\cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 78{,}46°$$

7.3 Messung im kartesischen Koordinatensystem

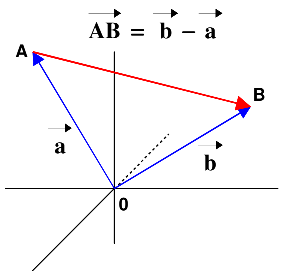
Ein affines Koordinatensystem mit einer ONB heißt **kartesisches Koordinatensystem**.



Anwendungen :

1. Die Länge einer Strecke

Sind $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ bzw. $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem, dann gilt



$$\boxed{\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

Beispiel :

$$A(1 \mid 2 \mid -3) \quad B(3 \mid -2 \mid -1) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{6}$$

oder schrittweise

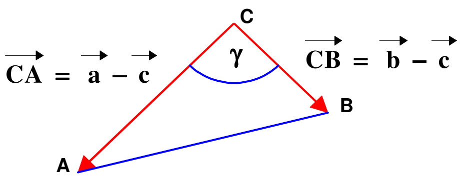
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{4+16+4} = 2\sqrt{6}$$

---

2. Innenwinkel eines Dreiecks

Sind $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ und $C(c_1|c_2|c_3)$ Eckpunkte eines

Dreiecks, dann gilt z.B. für den Innenwinkel γ



$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}}$$

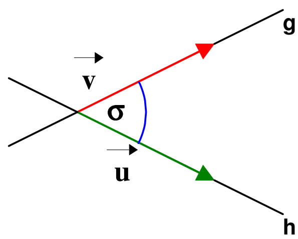
Beispiel :

$$A(0\,|\,2\,|\,0)\ \ B(0\,|\,-6\,|\,0)\ \ C(0\,|\,0\,|\,2) \ \Rightarrow\ \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -8 \quad \overline{CA} = \sqrt{8} \quad \overline{CB} = \sqrt{40} \ \Rightarrow\ \cos\gamma = \frac{-8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{40}} \qquad \gamma \approx 116{,}57°$$

---

3. Schnittwinkel zweier Geraden



Sind

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \ \text{und}\ h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{u}$$

zwei sich schneidende, dann gilt für ihren **Schnittwinkel** σ d. h. den nichtstumpfen Winkel ∡(g, h), den sie miteinander bilden,

$$\boxed{\mathbf{\cos\measuredangle(g, h) = \cos\sigma = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v} \right|}}$$

Bemerkung :

Sind zwei Geraden windschief, dann erhält man (Überkreuzungs-)Winkel der beiden Geraden.

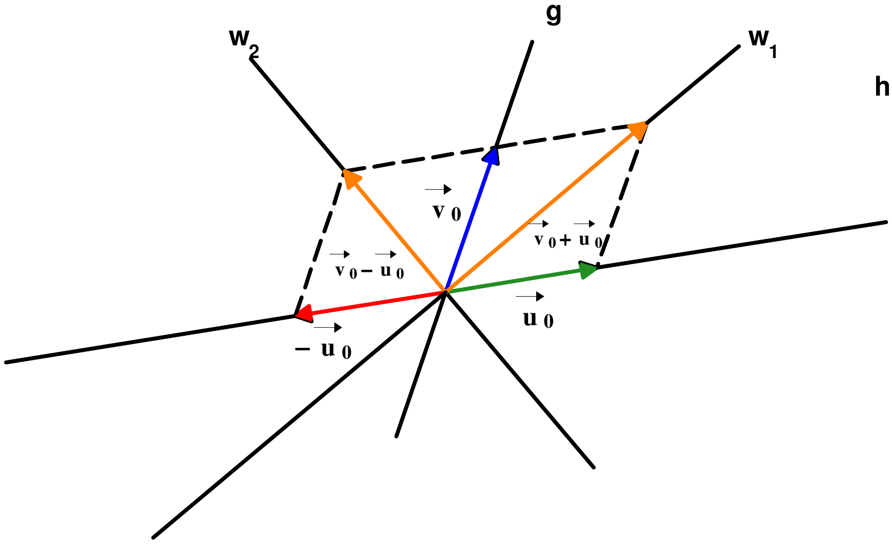
Beispiel :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann ist}\ \cos\measuredangle(g, h) = \left| \frac{-2}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{10}} \right| \ \Rightarrow\ \measuredangle(g, h) \approx 83{,}37°$$

---

4. Winkelhalbierende



Sind $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{u}$

zwei sich schneidende Geraden und ist $\vec{s}$ der Ortsvektor des Schnittpunkts, dann lauten die Gleichungen der Winkelhalbierenden

$$\boxed{\mathbf{w}: \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{s}} + \omega \cdot (\vec{\mathbf{v}}_0 \pm \vec{\mathbf{u}}_0)}$$

$\vec{v}_0$ bzw. $\vec{u}_o$ sind die Einheitsvektoren in Richtung von $\vec{v}$ bzw. $\vec{u}$.

Beispiel :

Für $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Winkelhalbierenden zu

$w_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma' \left[\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right]$ bzw. $w_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau' \left[\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right]$

Vereinfacht

$w_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beachte : $w_1 \perp w_2$

----

5. Orthogonalität

Beispiel : Ermittle einen Vektor $\vec{n}$, der auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

Der Ansatz $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ergibt die Bedingungen

(1) $\vec{a} \bullet \vec{n} = 0 \iff n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$

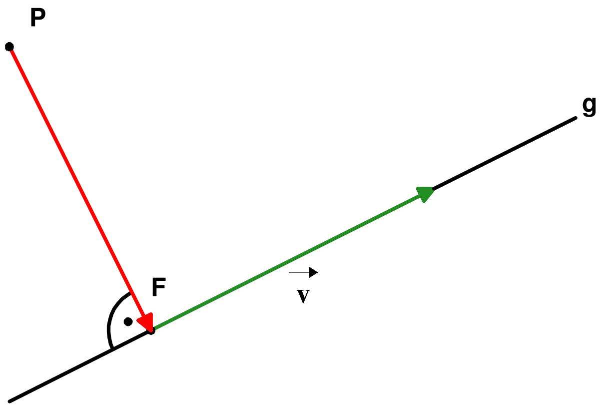
(2) $\vec{b} \bullet \vec{n} = 0 \iff 3n_1 + 2n_2 + n_3 = 0$

Dieses unterbestimmte Gleichungssystem hat die Lösung $\vec{n} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein derartiger Vektor ist

bis auf Kollinearität eindeutig bestimmt.

Anwendungen :

a) Abstand eines Punktes von einer Geraden



Definition :

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden g versteht man die Länge der Lotstrecke von P auf die Gerade.

$$\boxed{\mathbf{d(P;\, g) \;=\; \overline{PF}}}$$

Beispiel :

Bestimme den Abstand des Punktes $P\begin{pmatrix}1 & | & 0 & | & 0\end{pmatrix}$ von der Geraden g : $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

1. **Ansatz** für den Fußpunkt F des Lotes l von P auf g : $\vec{f} = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\tau\\-3-\tau\\\tau\end{pmatrix}$,

da $F \in g$

2. **Vektor** : $\overrightarrow{PF} = \vec{f} - \vec{p} = \begin{pmatrix}1+2\tau\\-3-\tau\\\tau\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\tau\\-3-\tau\\\tau\end{pmatrix}$

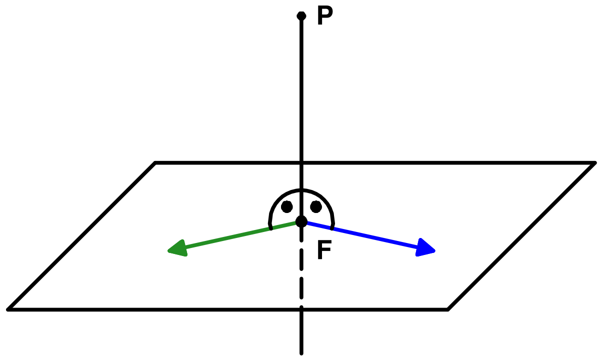
2. **Orthogonalitätsbedingung** :

$$\vec{v} \perp \overrightarrow{PF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\tau \\ -3-\tau \\ \tau \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4\tau + 3 + \tau + \tau = 0 \Leftrightarrow \tau = -0{,}5$$

Eingesetzt in 1. ergibt sich der Lotfußpunkt : $F\left(0 \,\middle|\, 2{,}5 \,\middle|\, -0{,}5\right)$

3: **Abstand** : $d(P\,;\,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2{,}5)^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{7{,}5}$

b) Der Abstand eines Punktes von einer Ebene



Definition :

Der Abstand eines Punktes P zu einer Ebene E ist die Länge der der Lotstrecke von P zu E.

$$\boxed{\mathbf{d(P;\,E) = \overline{PF}}}$$

Beispiel :

Bestimme den Abstand des Punktes $P(-1\,|\,2\,|\,3)$ von der Ebene

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Lotvektor :

$$(1)\ \left|\, 2n_1 - n_2 + 3n_3 = 0 \quad 2 \,\right|\ n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$$

$$2\cdot(1)+(2)\;\Big|\;5n_1+5n_3 = 0$$

Parametrisierung : $n_1 = k \quad \Rightarrow \quad n_3 = -k$

In (1) : $n_2 = -k \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

2. Lotgerade

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

3. Koordinatenform von E :

$$\begin{vmatrix}x_1+1 & 2 & 1\\ x_2 & -1 & 2\\ x_3-2 & 3 & -1\end{vmatrix} = x_1+1+4x_3-8+3x_2+x_3-2-6x_1-6+2x_2 = 0 \iff$$

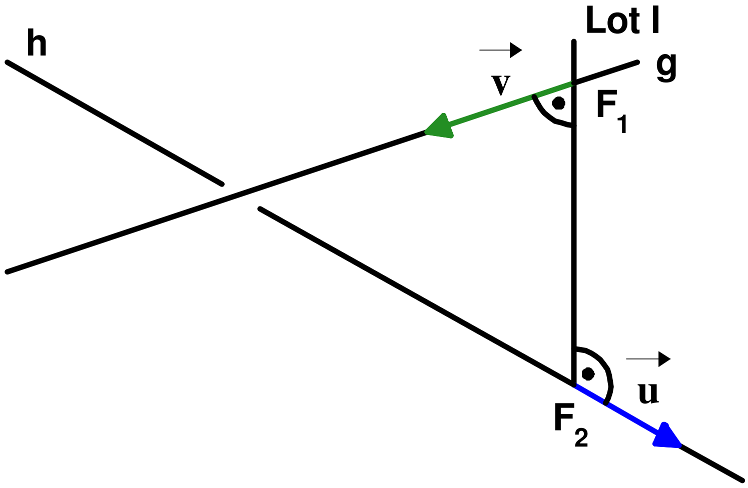
$$E:\ -5x_1+5x_2+5x_3-15 = 0 \iff x_1-x_2-x_3+3 = 0$$

4. Lotfußpunkt

l in E : $(-1+\mu)-(2-\mu)-(3-\mu)+3 = 0 \iff \mu = 1$

Damit ist $F(0\,|\,1\,|\,2)$ und $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ also $\overline{PF} = \sqrt{3}$

c) Abstand zweier windschiefen Geraden



Zwei windschiefe Geraden g und h besitzen eine gemeinsame Lotgerade l.

Definition :

Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g und h versteht man die Länge der gemeinsamen Lotstrecke.

$$\boxed{\mathbf{d(g;\ h)\ =\ \overline{F_1F_2}}}$$

Beispiel :

Bestimme den Abstand der windschiefen Geraden

$$g:\ \vec{x}\ =\ \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } h:\ \vec{x}\ =\ \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

1. **Ansatz** für den Verbindungsvektor der beiden Lotfußpunkte :

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{f_2} - \vec{f_1} = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-1+2\sigma\\-3+\sigma-\tau\\6+\tau\end{pmatrix}$$

2. **Orthogonalitätsbedingungen** :

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -1+2\sigma \\ -3+\sigma-\tau \\ 6+\tau \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -3+\sigma-\tau-6-\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma - 2\tau = 9$$

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -1+2\sigma \\ -3+\sigma-\tau \\ 6+\tau \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -2+4\sigma-3+\sigma-\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sigma-\tau = 5$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{40}{9} \text{ und } \sigma = \frac{1}{9} \text{ und damit } \overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -7/9 \\ 14/9 \\ 14/9 \end{pmatrix}$$

3. **Abstand** : $d(g\,;h) = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{(-\frac{7}{9})^2+(\frac{14}{9})^2+(\frac{14}{9})^2} = \frac{7}{3}$
