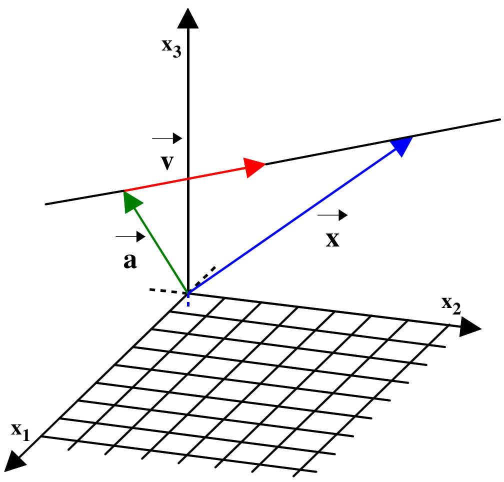
V. Geradengleichungen in Parameterform

===

5.1 Definition



Definition und Satz :

Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt A $\in$ g mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und ein Richtungsvektor $\vec{v} \neq \vec{o}$, der die Orientierung der Gerade im Raum oder in der Ebene festlegt.

Genau dann liegt ein Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ auf g, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gib,t so dass

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \quad (*)}$$

$(*)$ heißt **Geradengleichung der Geraden g in Parameterform** mit dem **Parameter λ**.

A heißt **Aufpunkt** der Geraden g.

Bemerkungen :

a) Als Aufpunkt kann jeder Punkt auf der Geraden gewählt werden.

b) Der Richtungsvektor einer Geraden ist nicht eindeutig bestimmt. Ist $\vec{v}$ ein Richtungsvektor einer Geraden, dann ist dies auch $k \cdot \vec{v}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$.

Beispiel :

Die Gleichungen $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ stellen also die gleiche Gerade dar.

Beispiel :

Gegeben. $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P\left(1 \middle| -2 \middle| 3\right)$, $Q\left(6 \middle| 8 \middle| 1\right)$

Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ergibt den Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden z. B.

$\lambda = -1$ ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $X\left(2 \middle| 0 \middle| 2\right) \in g$

Der Punkt P liegt auf g, denn P in g eingesetzt ergibt :

(1) $3 + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -2$

(2) $2 + 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -2$

(3) $1 - \lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -2$

D.h., P ist der zu $\lambda = -2$ gehörende Punkt der Geraden g.

Der Punkt Q liegt nicht auf g, denn Q in g eingesetzt ergibt

(1) $3 + \lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3$

(2) $2 + 2\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 3$

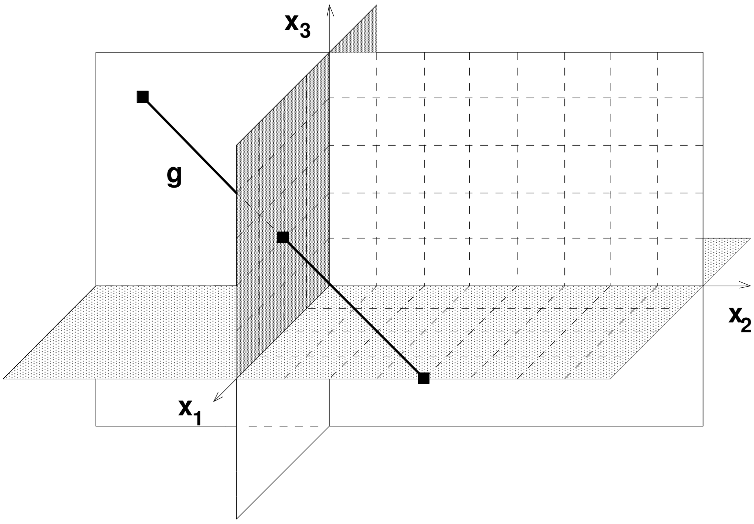
(3) $1 - \lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 2$

Zur zeichnerischen Darstellung berechnet man die Koordinaten der Schnittpunkte (**Spurpunkte**) mit den Koordinatenebenen und zeichnet ein **Schrägbild** :

$x_1x_2-\text{Ebene}: \quad x_3 = 0 \;\Rightarrow\; 1-\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \qquad S_{x_1x_2}\,(4\,|\,4\,|\,0)$

$x_1x_3-\text{Ebene}: \quad x_2 = 0 \;\Rightarrow\; 2+2\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1 \qquad S_{x_1x_3}\,(2\,|\,0\,|\,2)$

$x_2x_3-\text{Ebene}: \quad x_1 = 0 \;\Rightarrow\; 3+\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -3 \qquad S_{x_1x_3}\,(0\,|\,-4\,|\,4)$



Spezialfälle :

Gleichungen der Koordinatenachsen

$x_1-\text{Achse}: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad x_2-\text{Achse}: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad x_3-\text{Achse}: \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Geraden parallel zur

$$x_1x_2-\text{Ebene}: \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\0\end{pmatrix}$$

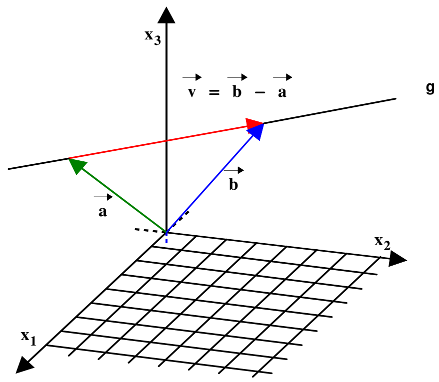
$$x_1x_3-\text{Ebene}: \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}v_1\\0\\v_3\end{pmatrix}$$

$$x_2x_3-\text{Ebene}: \vec{x} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

5.2. Zweipunkteform

Eine Gerade ist durch Angabe von zwei verschiedenen Punkten eindeutig bestimmt.

Gegeben : $A\left(2\,\middle|\,3\,\middle|\,5\right)$ und $B\left(1\,\middle|\,-4\,\middle|\,3\right)$



Eine Gleichung der Geraden AB ist dann gegeben durch

$$AB : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right) :$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Satz :

Eine Gleichung der Geraden AB durch zwei Punkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet

$$\boxed{\mathbf{AB : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)}} \quad \textbf{(Zwei-Punkte-Form)}$$

Beispiel :

Gegeben sind die Punkte $A\left(-1\,\middle|\,1\,\middle|\,-2\right)$, $B\left(2\,\middle|\,-3\,\middle|\,3\right)$ und $C\left(-4\,\middle|\,5\,\middle|\,-7\right)$.

Zeigen Sie, dass A, B und C auf einer Geraden liegen, und geben Sie an, wie die Punkte zueinander liegen.

Lösung :

Es ist $AB : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

C eingesetzt ergibt $\tau = -1$, d.h. A liegt zwischen B und C.

Beachte :

Liegt ein Punkt auf einer Geraden AB, dann lässt sich sein Parameterwert aus der Dar-stellung

$$\vec{c} = \vec{a} + \lambda_C \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

die Lage relativ zu A und B entnehmen.

Zum Beispiel liegt C nur dann zwischen A und B, d.h. im Innern der Strecke $\left[AB\right]$,

wenn $0 < \lambda_C < 1$ ist.

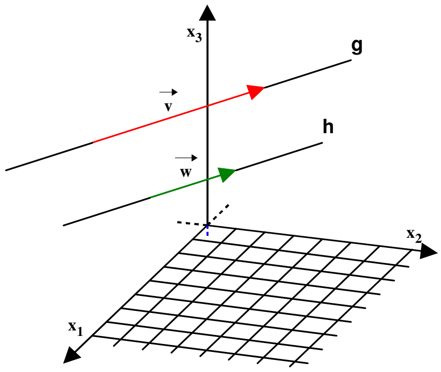
5.3 Gegenseitige Lagebeziehung von Gerade

---

a) Parallele und identische Geraden

Gegeben :

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Ansatz : $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -\frac{2}{3} \Rightarrow g \parallel h$

$A\left(3 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 4\right)$ in g :

(1)	$-6 + 4\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 2{,}25$	
(2)	$5 + 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -0{,}5$	
(3)	$-6\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$	$\Rightarrow g \neq h$

Satz :

Für zwei Geraden g und h mit $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$ bzw. $h : \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{w}$ gilt

$$\boxed{\mathbf{g \parallel h \Leftrightarrow \left\{ \vec{v}, \vec{w} \right\} \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{w},\ k \in \mathbb{R}}}$$

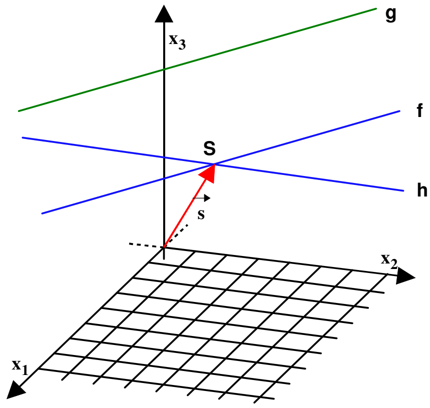
$$\boxed{\mathbf{g \equiv h \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{a} + \lambda \vec{v}} \text{ oder } \mathbf{\vec{a} = \vec{b} + \mu \vec{w}}}$$

b) Sich schneidende und windschiefe Geraden

Gegeben :

$$f:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$f \cap h$:

(1) (2) (3)	$-2 - 4\lambda = 2 - 3\tau$ $1 + 4\lambda = 1 + \tau$ $2\lambda = -3 + 2\tau$	
(1) + (2)	$-1 = 3 - 2\tau \Rightarrow \tau = 2$	
in (2)	$\Rightarrow \lambda = 0{,}5$	
in (3)	$1 = -3 + 4$ (w)	$\Rightarrow$ f und h schneiden sich

Ortsvektor und Koordinaten des Schnittpunkts :

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad S\left(-4 \,\middle|\, 3 \,\middle|\, 2\right)$$

$g \cap h$:

(1) (2) (3)	$-5 - 4\mu = 2 - 3\tau$ $1 + 4\mu = 1 + \tau$ $2 + 2\mu = -3 + 2\tau$	
(1) + (2)	$-4 = -2\tau \Rightarrow \tau = 2$	
in (2)	$\Rightarrow \mu = 0{,}5$	
in (3)	$2 + 1 = -3 + 4$ (f)	$\Rightarrow$ g und h sind windschief

Satz :

Für zwei Geraden g und h mit g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$ bzw. h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{w}$ gilt die Schnittpunktsbedingung :

$$\boxed{\vec{a} + \lambda \vec{v} = \vec{b} + \mu \vec{w}}$$

Hat das sich ergebende Gleichungssystem

a) **eine**

b) **keine**

c) **unendlich viele Lösungen**,

dann sind g und h

a) **sich schneidende**

b) **parallele und nichtidentische** oder **zueinander windschiefe**

c) **identische**

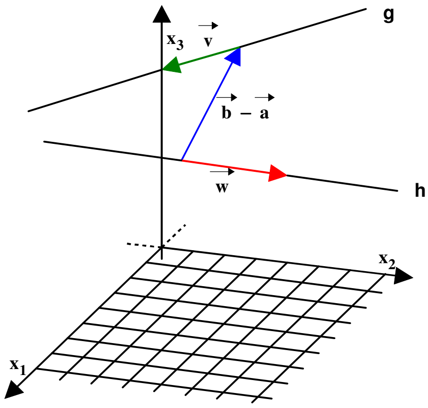
Geraden.

Satz :

Zwei Geraden g und h mit g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}$ bzw. h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{w}$ sind genau dann **windschief**,

wenn $\vec{\mathbf{v}}$**,** $\vec{\mathbf{w}}$ und $\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}$ **linear unabhängig** sind, d.h. $\left| \vec{v}\ ,\ \vec{w}\ ,\ \vec{b} - \vec{a} \right| = 0.$

Beweis :



Zwei Geraden schneiden sich oder sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen. Genau dann sind aber die obigen drei Vektoren linear abhängig.

Beispiel :

Gegeben sind die windschiefen Geraden g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

und

der Punkt $A(2\,|\,0\,|\,0)$.

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch A, die g und h schneidet ?

Lösung :

Die Verbindungsgerade von A mit einem Punkt auf g hat die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Genau dann existiert ein Schnittpunkt dieser Geraden mit h, wenn

$$\begin{vmatrix} 0-2 & -1+2\lambda & 1 \\ 1-0 & \lambda & 2 \\ 0-0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1+2\lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6+4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1{,}5$$

Die gesuchte Gerade hat also die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Beispiel :

Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung einer Geraden g_k.

Man spricht von einer einparametrigen **Geradenschar**.

a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene liegen und sich schneiden.

b) Die Schnittpunkte der Schargeraden mit der x_1x_2 – Ebene liegen auf einer Halbgeraden. Weisen Sie dies nach und beschreiben Sie diese Halbgerade.

Lösung :

a) Offensichtlich sind keine zwei Geraden der Schar parallel.

Wegen

$$\begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 - k_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

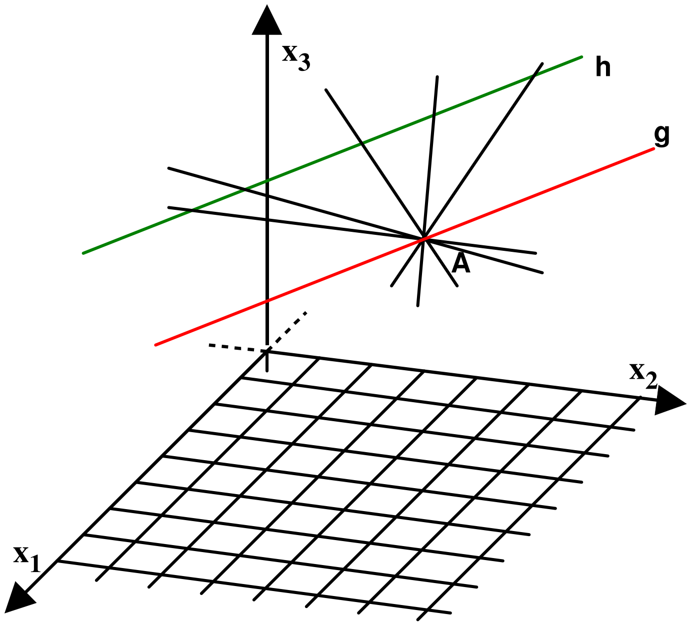
schneiden sich zwei verschiedene Geraden der Schar in einem Punkt.

b) Die Bedingung $x_3 = 0$ ergibt $\mu = -k$ und damit $S_{x_1x_2}\left(2-k^2 \,\middle|\, -1+k^2 \,\middle|\, 0\right)$.

Setzt man $k^2 = \sigma, \sigma \geq 0$, dann gilt $\overrightarrow{s_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d.h. alle Schnittpunkte liegen

auf einer Halbgeraden.

5.4 Geradenbüschel



Ist A ein Punkt und h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$ eine Gerade mit $A \notin h$,

dann bildet die Menge der Verbindungsgeraden von A mit den Punkten der Geraden h ein sog. **Geradenbüschel** mit dem Büschelpunkt A.

Da alle Büschelgeraden in der durch A und h bestimmten Ebene E(A; h) liegen, spricht man von einem ebenen Büschel.

Eine Gerade des Büschels hat dann die Gleichung $g_{u_0} : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} + \mu_0 \vec{v} - \vec{a} \right)$

Wählt man μ_0 als Parameter und setzt $\mu_0 = k$, dann sind alle Geraden des Büschels gegeben

durch $g_k : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \vec{a} + k \cdot \vec{v} \right) = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{w} + k \cdot \vec{v} \right)$ (mit $\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$)

d. h. ein Geradenbüschel ist der Spezialfall einer sog. einparametrigen Geradenschar.

Beachte :

Die in E liegende und durch A gehende Gerade g : $\vec{x} = \vec{a} + \sigma \cdot \vec{v}$

gehört nicht dem Büschel an, da $g \parallel h$ ist.

Satz :

Jede einparametrige Geradenschar der Form

$g_k : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{w} + k \cdot \vec{v})$

stellt ein **Geradenbüschel** mit dem zum Ortsvektor $\vec{a}$ gehörenden Punkt A als **Büschelpunkt** dar.

Die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + \sigma \cdot \vec{v}$ ist die einzige Gerade durch A, die in der durch das Büschel festgelegten Ebene liegt, aber nicht dem Büschel angehört.

Beispiel :

Gegeben ist das Geradenbüschel $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ mit dem Büschelpunkt $A\left(4 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 1\right)$.

a) Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in einer Ebene E liegen.

Welche Gerade in E durch A gehört nicht der Schar g_k an ?

b) Bestimmen Sie die Büschelgerade, welche die $x_3 -$ Achse schneidet.

c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte $S_{x_2x_3}$ der Büschelgeraden mit der $x_1x_2 -$ Ebene in Abhängigkeit von k.

Zeigen Sie, dass alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden s liegen und geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.

Durch welchen Punkt von $s_{x_2x_3}$ geht keine Büschelgerade ?

Lösung :

a) Umformung : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also liegt in der Ebene E, durch die beiden Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h gehört nicht der Schar an.

b) Bedingung : (1) $x_1 = 4 + \lambda(2k-1) = 0$ und (2) $x_2 = 4 + \lambda = 0$

Aus (2) folgt $\lambda = -4$

Einsetzen in (1) ergibt : $k = 1$

Damit ergibt sich : $x_3 = 1 + \lambda k = 1 + (-4)\cdot 1 = -3$

Die Gerade g_1 schneidet die x_3 – Achse im Punkt $S_{x_3}\left(0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 3\right)$

c) Die Bedingung $x_3 = 1 + k\lambda = 0$ ergibt : $\lambda = -\frac{1}{k}$, $k \neq 0$

Damit ist $x_1 = 4 + \lambda(2k-1) = 4 - \frac{1}{k}(2k-1) = 2 + \frac{1}{k}$ und $x_2 = 4 + \lambda = 4 - \frac{1}{k}$

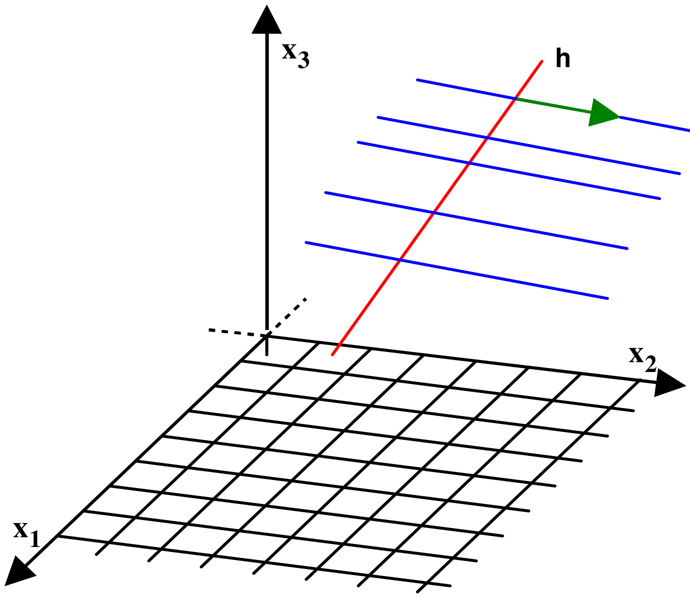
Menge der Spurpunkte mit der x_1x_2 – Ebene : $S_{x_1x_2}\left(2 + \frac{1}{k} \,\middle|\, 4 - \frac{1}{k} \,\middle|\, 0\right)$

Die Umformung $\overrightarrow{s_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 2+1/k \\ 4-1/k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt, dass die Spurpunkte auf der

Geraden $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. s ist die Spurgerade der Ebene E in der x_1x_2 – Ebene.

Der Punkt $P\left(2 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 0\right)$ ist kein Spurpunkt einer Büschelgeraden ($\frac{1}{k} \neq 0$).

P ist der Spurpunkt der Geraden h, die ja nicht der Schar angehört.



Ist ein

h : $\vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$ eine Gerade und $\vec{w} \neq \vec{o}$ ein von $\vec{v}$ linear unabhängiger Vektor,

dann ist

$$\vec{x} = \vec{b} + \mu_0 \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$$

eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{w}$ mit dem Aufpunkt auf h.

Wählt man μ_0 als Parameter und setzt $\mu_0 = k$, dann erhält man ein **Parallelenbüschel** mit der **Trägergeraden** h und dem Richtungsvektor $\vec{w}$.

Da alle Geraden in der durch h und $\vec{w}$ bestimmten Ebene liegen, heißt das Büschel eben.
Damit ist gezeigt

Satz :

Jede einparametrige Geradenschar der Form

$$g_k : \vec{x} = \vec{b} + k \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$$

stellt ein **Parallelenbüschel** mit der Trägergeraden h : $\vec{x} = \vec{a} + \mu \cdot \vec{v}$

und dem Richtungsvektor $\vec{w}$ dar.