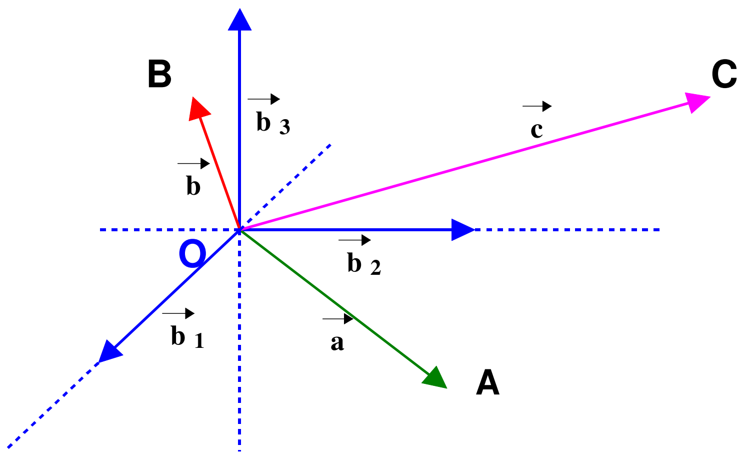
IV. Teilung und Teilverhältnis im Punktraum

4.1 Der Punktraum

Wir wählen einen Punkt O des zwei- bzw. dreidimensionalen euklidischen Raums als **Ursprung** oder Nullpunkt.



Die von O ausgehenden und zu den Raumpunkten A, B, C usw. führenden Vektorrepräsentanen $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ usw. nennt man die **Ortsvektoren** dieser Punkte bzgl. des Ursprungs O.

Man schreibt : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ usw.

Ergänzt man O durch eine Basis des zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraums, dann erhält man ein **Koordinatensystem**

$$\left[\mathbf{O} ; \left\{ \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , < \vec{b}_3 > \right\} \right].$$

Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ bzgl. der Basis $\left\{ \vec{b}_1 , \vec{b}_2 , < \vec{b}_3 > \right\}$ bezeichnet man auch als die **Punktkoordinaten** des Punktes A bzgl. des Koordinatensystems.

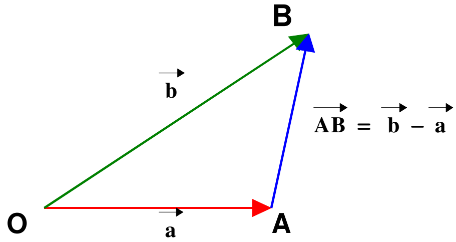
Man schreibt

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\left(a_1 \middle| a_2 \middle| a_3\right)}$$

Anwendung :

Jeder Vektorrepräsentant $\overrightarrow{AB}$ lässt sich als Differenzvektor der Ortsvektoren seiner Endpunkte darstellen.
Es gilt :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$$



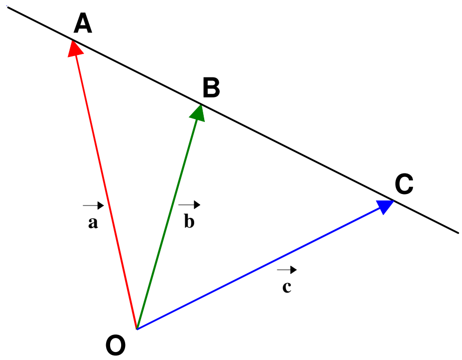
Beispiel :

Gegeben sind die Punkte $A(-3 \mid -4 \mid 2)$, $B(1 \mid 2 \mid 0)$ und $C(3 \mid 5 \mid -1)$.

Zeige, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

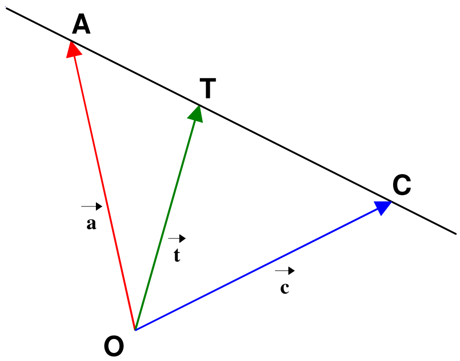
Lösung :

Wir zeigen $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ und damit } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}.$$

4.2 Das Teilverhältnis



Definition :

Liegt ein Punkt T auf der Geraden AB und ist T $\neq$ B, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\boxed{\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB}}$$

ist. Man nennt λ das **Teilverhältnis**, in dem T die Strecke $[AB]$ teilt und schreibt

$$\boxed{\lambda = (AB\,;\,T)}$$

Man unterscheidet

a) **innere Teilung** : T liegt zwischen A und B, d.h. $T \in \,]AB[\quad \Leftrightarrow \quad \lambda \geq 0$

b) **äußere Teilung** : $T \in AB \setminus [ab] \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < 0$

Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{t}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B und T, dann folgt aus der Definition

$$\vec{t} - \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{t}) \Leftrightarrow \vec{t} - \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} - \lambda \cdot \vec{t}$$

Daraus kann man herleiten

1. Berechnung des Ortsvektors des Teilpunktes T bei gegebenem Teilverhältnis

$$\boxed{\vec{t} = \frac{1}{1+\lambda}(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{b})}$$

2. Berechnung des Ortsvektors des zweiten Endpunktes bei gegebenem Teilpunkt und anderem Endpunkt

$$\boxed{\vec{a} = \vec{t} + \lambda \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)} \quad \boxed{\vec{b} = \vec{t} + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\vec{t} - \vec{a}\right)}$$

3. Berechnung des Teilverhältnisses bei gegebenen A, B und T

Es gilt :

Die Punkte A, B und T liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\boxed{\frac{t_1 - a_1}{b_1 - t_1} = \frac{t_2 - a_2}{b_2 - t_2} = \frac{t_3 - a_3}{b_3 - t_3} = \lambda} \text{ für alle i mit } b_i \neq t_i \text{ , } 1 \leq i \leq 3$$

λ ist dann das Teilverhältnis, in dem T die Strecke $\left[AB\right]$ teilt.

Beispiel :

Gegeben sind die Punkte A(2 | −3 | 1), B(2 | −1 | 5) und C(2 | −4 | −1).

a) Zeige, dass A, B und C auf einer Geraden liegen und berechne das Verhältnis λ_C, in dem C die Strecke [AB] teilt. Gib die relative Lage der drei Punkte auf der Geraden AB an.

b) Bestimme die Koordinaten des Punktes D, der die Strecke $\left[AB\right]$ im Verhältnis $\frac{1}{\lambda_C}$ teilt.

Lösung :

a) Es ist $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ d.h.

$\lambda_C = -\frac{1}{3}$.

C liegt außerhalb der Strecke [AB] und näher bei A als bei B, da $\lambda_C < 0$ und $\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{BC}$

Beachte :

Die Bestimmung des Teilverhältnisses erfolgt am besten mit der Definitionsgleichung.

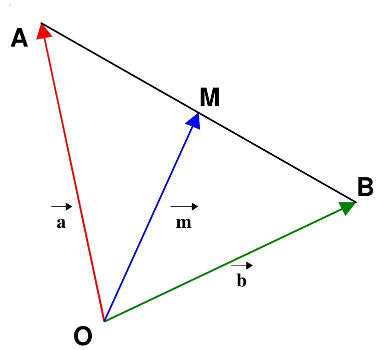
b) $\overrightarrow{AD} = -3 \cdot \overrightarrow{DB} \iff \vec{d} - \vec{a} = -3 \cdot \left(\vec{b} - \vec{d}\right) \Rightarrow 2 \cdot \vec{d} = 3 \cdot \vec{b} - \vec{a}$

$$\vec{d} = \frac{1}{2} \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$ und damit ist $D\left(2 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 7\right)$ der gesuchte Punkt.

4.3 Anwendungen

---

a) **Mittelpunkt einer Strecke**

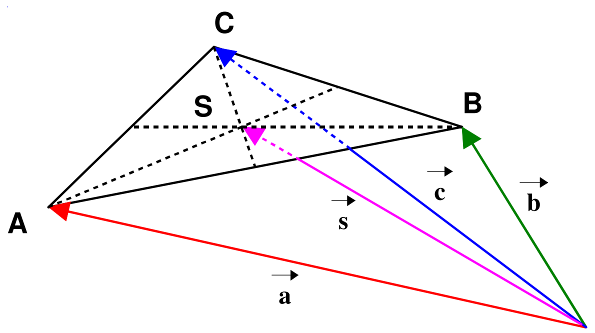


Es ist (AB ; M) = 1 und damit ist der Ortsvektor des

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$$

---

b) **Schwerpunkt eines Dreiecks**



Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks und teilen sich im Verhältnis 2 : 1.

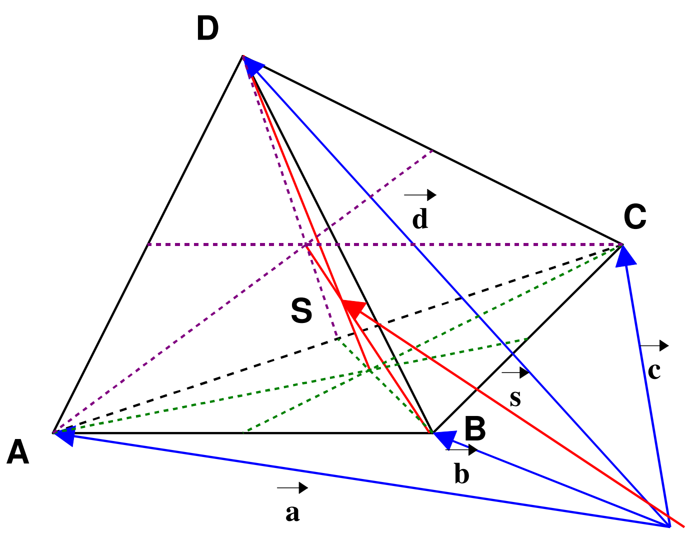
Also gilt für den Orstvektor $\vec{s}$ des Schwerpunkts eines Dreiecks ABC mit den Ecken A, B und C:

$$(AM_a\,;S) = 2 \;\Rightarrow\; \vec{s} = \frac{1}{1+2}\cdot\left[\vec{c} + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\boxed{\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$$

---

c) **Schwerpunkt eines Tetraeders**



Die Verbindungslinien der Eckpunkte eines Tetraeders mit dem Schwerpunkt der jeweils gegenüber liegenden Seitenfläche schneiden sich im Schwerpunkt S des Tetraeders und teilen sich im Verhältnis 3 : 1..

Also gilt

$$\boxed{\vec{s} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right)}$$

Bemerkung :

Im allgemeinen unterscheidet man Ecken-, Kanten, Flächen und Raumschwerpunkte. Bei der Strecke fällt der Eckenschwerpunkt mit dem Kantenschwerpunkt, beim Dreieck mit dem Flächenschwerpunkt und beim Tetreader mit dem Raumschwerpunkt zusammen.

Beispiel :

$M_a\left(1 \,\middle|\, -2 \,\middle|\, 3\right)$, $M_b\left(0 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, 1\right)$ und $M_c\left(-3 \,\middle|\, 1 \,\middle|\, 2\right)$

sind die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks.

Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks.

Lösung :

Es ist (1) $\vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ (2) $\vec{m}_b = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$ (3) $\vec{m}_c = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

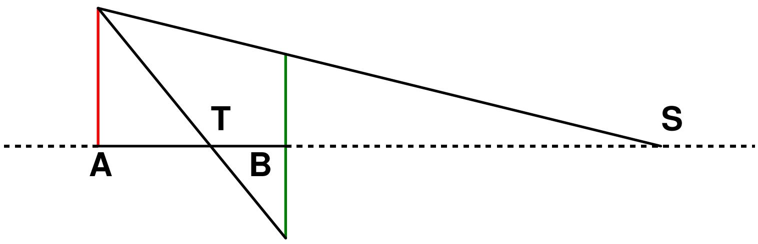
Addiert man diese drei Gleichungen, dann ergibt sich (4) $\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Aus (1) und (4) ergibt sich $\vec{a} = \vec{m}_b + \vec{m}_c - \vec{m}_a = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ d. h. $A\left(-4 \,\middle|\, 5 \,\middle|\, 0\right)$

Analog ergibt sich $B\left(-2 \,\middle|\, -3 \,\middle|\, 4\right)$ und $C\left(4 \,\middle|\, -1 \,\middle|\, 2\right)$

---

d) **Harmonische Teilung**



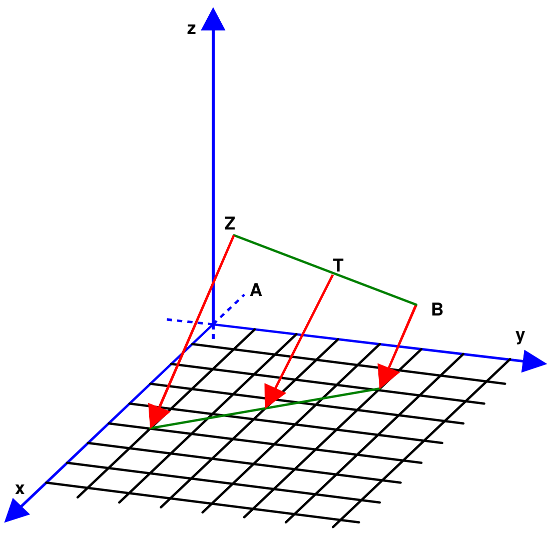
Definition :

Die Punkte S und T teilen die Strecke $[AB]$ **harmonisch**, wenn

$$\boxed{(AB\,;S) = -\,(AB\,;T)}$$

4.4 Teilverhältnis und Projektionen

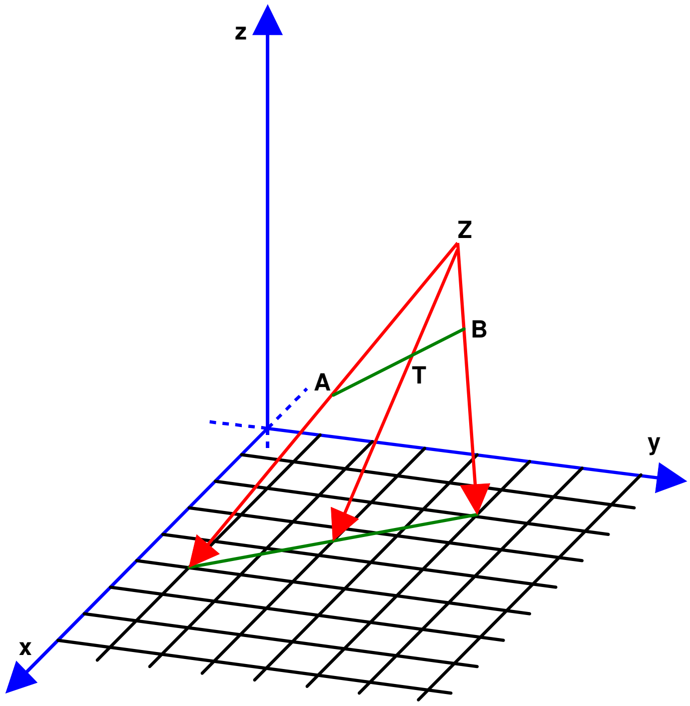
Parallelprojektion



Bei der Parallelprojektion des Raumes auf eine Ebene bleibt das Teilverhältnis erhalten d. h.

$$\boxed{\lambda(AB\,;\,T) \;=\; \lambda(A'B'\,;\,T')}$$

Zentralprojektion



Bei der Zentralprojektion des Raumes auf eine Ebene bleibt das Teilverhältnis nicht erhalten.

Sind T und S zwei Teilpunkte einer Strecke [AB], dann heißt

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{AB}\ ;\ \mathbf{T})}{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{AB}\ ;\ \mathbf{S})}}$$

das **Doppelverhältnis**, in dem T und S die Strecke $\left[\mathrm{AB}\right]$ teilen.

Dieses Doppelverhältnis bleibt bei der Zentralprojektion erhalten.
