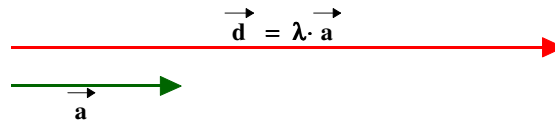
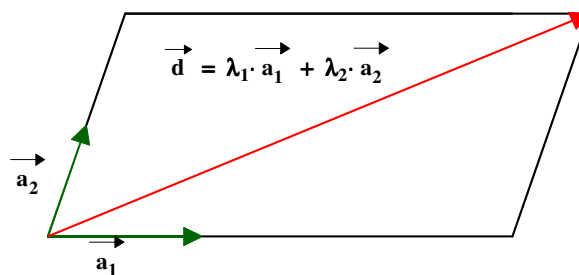


II. Basis und Dimension

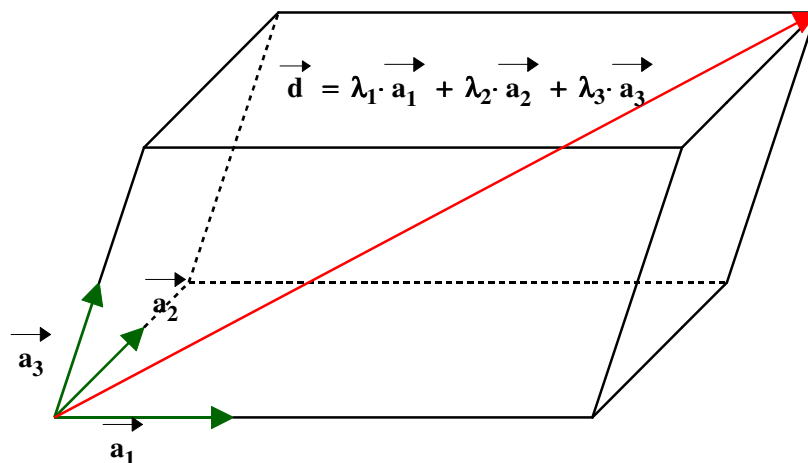
2.1 Linearkombination und Basis



Ist \vec{a} ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dann ist jeder dazu parallele (kollinear) Vektor \vec{d} ein Vielfaches von \vec{a} .



Sind \vec{a}_1 und \vec{a}_2 zwei nicht kollineare und vom Nullvektor verschiedene Vektoren der Ebene, dann lässt sich jeder zu dieser Ebene parallele (zu \vec{a}_1 und \vec{a}_2 komplanare) Vektor \vec{d} als Summe von Vielfachen dieser beiden Vektoren darstellen.



Sind \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 drei nicht komplanare und vom Nullvektor verschiedene Vektoren des Raumes, dann lässt sich Vektor \vec{d} als Summe von Vielfachen dieser drei Vektoren darstellen.

Deshalb definiert man

Definition :

Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ Vektoren eines Vektorraums, dann heißt der Vektor

$$\vec{d} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$$

eine **Linearkombination** dieser Vektoren.

Gilt speziell $\vec{d} = \vec{0}$, dann heißt

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

eine **Nullsumme** von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Ist dabei $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, dann spricht man von einer **trivialen Nullsumme**,
andernfalls heißt die Nullsumme nichttrivial.

Bemerkungen :

- a) Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ bildet einen Untervektorraum des Vektorraumes V , den von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannten Raum.
- b) Eine nichttriviale Nullsumme im geometrischen Vektorraum bedeutet, dass sich aus den Vektoren $\lambda_i \vec{a}_i, (1 \leq i \leq n)$, eine **geschlossene Vektorkette** bilden lässt.
- c) Lässt sich aus den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ eine nichttriviale Nullsumme bilden, dann lässt sich mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen.

Definition :

Eine Menge $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ von Vektoren eines Vektorraumes V heißt eine **Basis**

dieses Vektorraumes, wenn sich jeder Vektor \vec{v} aus V auf **genau eine Weise** als **Linearkombination** dieser Basisvektoren schreiben lässt.

Satz :

Genau dann ist eine Menge $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ von Vektoren eine Basis eines Vektorraumes V , wenn gilt

B1 Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ schreiben.

B2 $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren.

Beweis :

Sei $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ eine Basis von V .

Daher gilt trivialerweise B1.

Da sich der Nullvektor nur auf eine Art als Linearkombination der $\vec{b}_i, 1 \leq i \leq n$, schreiben lässt und dies daher nur die triviale Nullsumme sein kann, gilt auch B2.

Sei umgekehrt $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ so, dass B1 und B2 erfüllt sind.

Damit $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ eine Basis ist, muss gezeigt werden, dass die Darstellung eines Vektors als Linearkombination der $\vec{b}_i, 1 \leq i \leq n$, eindeutig ist.

Beweis durch Widerspruch :

Annahme :

Es gibt einen Vektor \vec{v} , der sich auf zwei verschiedene Arten als Linearkombination der $\vec{b}_i, 1 \leq i \leq n$, schreiben lässt, etwa

$$\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{b}_n = \mu_1 \cdot \vec{b}_1 + \mu_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + \mu_n \cdot \vec{b}_n$$

mit $\lambda_i \neq \mu_i$ für mindestens ein $i, 1 \leq i \leq n$.

Dann wäre aber

$$(\lambda_1 - \mu_1) \cdot \vec{b}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot \vec{b}_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \vec{b}_n = \vec{0}$$

eine nichttriviale Nullsumme . Widerspruch zu B2 !

Definition :

Ist $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \right\}$ eine Basis eines Vektorraumes V und gilt für einen Vektor \vec{a}

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i ;$$

dann heißen die $a_i, 1 \leq i \leq n$, die **Koordinaten** von \vec{a} bezüglich dieser Basis.

Man schreibt dafür

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und nennt diese Darstellung die **Koordinatenschreibweise** des Vektors \vec{a} bzgl. der zugrunde gelegten Basis.

Der Vektor $a_i \cdot \vec{b}_i$ heißt die **i-te Komponente** des Vektors bzgl. dieser Basis.

Speziell für die Basisvektoren gilt : $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ferner lässt sich zeigen :

Sind

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ die Koordinatendarstellung der Vektoren \vec{a} und \vec{b} , dann gilt für

die Koordinatendarstellungen von $\vec{a} + \vec{b}$ bzw. $\lambda \cdot \vec{a}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Kennt man die Koordinatendarstellung von Vektoren bzgl. einer Basis, dann kann die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren bzw. die Darstellung eines Vektors als Linearkombination dieser Vektoren algebraisch untersucht werden.

Beispiel :

Die Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} haben bzgl. der Basis $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\}$ eines Vektorraums die Koordinatendarstellungen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuche \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} auf lineare Unabhängigkeit.

b) Stelle den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} dar.

Lösung :

a) Ansatz : $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} + \nu \cdot \vec{w} = \vec{0}$

In Koordinatendarstellung : $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Das ergibt die

Koordinatengleichungen :	$\lambda + \mu + 2\nu = 0$	(1)
	$-2\lambda + 2\mu + \nu = 0$	(2)
	$3\lambda + \nu = 0$	(3)
$2 \cdot (1) - (2)$	$4\lambda + 3\nu = 0$	(4)

$3 \cdot (3) - (4)$	$5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$	
$\lambda = 0$ in (4)	$v = 0$	
$\lambda = 0$ und $v = 0$ in (1)	$\mu = 0$	

Also sind \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} linear unabhängig, da sich nur die triviale Nullsumme bilden lässt.

b) Der Ansatz: $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{a}$ führt auf die

Koordinatengleichungen:	$\lambda + \mu + 2\nu = 1$	(1)
	$-2\lambda + 2\mu + \nu = -5$	(2)
	$3\lambda + \nu = 4$	(3)
$2 \cdot (1) - (2)$	$4\lambda + 3\nu = 7$	(4)
$3 \cdot (3) - (4)$	$5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1$	
$\lambda = 1$ in (4)	$\nu = 1$	
$\lambda = 1$ und $\nu = 1$ in (1)	$\mu = 2$	

Also ist $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{a}$

2.2 Die Basen der geometrischen Vektorräume

1. Der Vektorraum der Vektoren parallel zu einer Geraden

Alle kollinearen Vektoren, d.h. Vektoren, deren Repräsentanten parallel (**kollinear**) zu einer Geraden sind, bilden einen Vektorraum.

Jeder Vektor, der vom Nullvektor verschieden ist, bildet eine Basis dieses Vektorraumes. .

2. Der Vektorraum der Pfeilklassen einer Ebene

Alle Vektoren, deren Repräsentanten parallel zu einer Ebene sind, bilden einen Vektorraum.

Jedes Paar vom Nullvektor verschiedener und nicht paralleler Vektoren bildet eine Basis dieses Vektorraumes.

3. Der Vektorraum der Pfeilklassen des Raumes

Jedes Tripel vom Nullvektor verschiedener und paarweise nicht kollinearere Vektoren, die nicht parallel zu einer Ebene (**komplanar**) sind, bildet eine Basis dieses Vektorraumes.

Folgerung :

3 geometrische Vektoren in der Ebene sind stets linear abhängig.

4 geometrische Vektoren des Raumes unserer Anschauung sind stets linear abhängig.

2.3 Anwendung

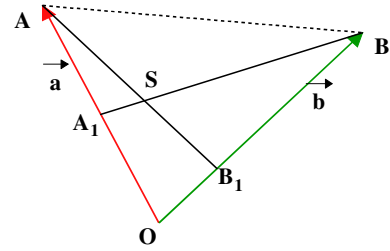
Beispiel :

Das Dreieck OAB sei festgelegt durch die Vektoren

$$\vec{OA} = \vec{a} \text{ und } \vec{OB} = \vec{b},$$

der Punkt A_1 durch $\vec{OA_1} = \frac{3}{4}\vec{a}$ und der Punkt B_1 durch

$$\vec{OB_1} = \frac{1}{2}\vec{b}.$$



In welchem Verhältnis teilen sich die Strecken $[AB_1]$ und $[BA_1]$?

1. Geschlossene Vektorkette, die den Schnittpunkt S der beiden Strecken enthält :

$$\vec{BA} + \vec{AS} + \vec{SB} = \vec{o}$$

2. Ansatz :

$$\vec{AS} = \lambda \vec{AB_1} \quad \vec{SB} = \mu \vec{A_1B}$$

3. Durch \vec{a} und \vec{b} ausgedrückt

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{AB_1} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} &= \vec{o} \Rightarrow \vec{AB_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \\ \vec{A_1B} - \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} &= \vec{o} \Rightarrow \vec{A_1B} = \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} \end{aligned}$$

4. Einsetzen und Ordnen

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} + \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \right) + \mu \left(\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} \right) &= \vec{o} \\ \left(-\lambda - \frac{3}{4}\mu + 1 \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu - 1 \right) \vec{b} &= \vec{o} \end{aligned}$$

5. Lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} (1) \quad -\lambda - \frac{3}{4}\mu + 1 &= 0 \\ (2) \quad \frac{1}{2}\lambda + \mu - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ergibt } \lambda = \frac{2}{5} \text{ und } \mu = \frac{4}{5}$$

6. Teilverhältnis

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SB_1}} = \frac{\frac{2}{5}\overline{AB_1}}{\frac{3}{5}\overline{AB_1}} = \frac{2}{3} \quad \frac{\overline{A_1S}}{\overline{SB}} = \frac{\frac{1}{5}\overline{A_1B}}{\frac{4}{5}\overline{A_1B}} = \frac{1}{4}$$

2.4 Dimension

Satz :

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis mit einer endlichen Anzahl n von Basisvektoren, dann besteht jede andere Basis ebenfalls aus n Vektoren. Man nennt die Zahl n die **Dimension** des Vektorraumes und schreibt

$$\dim V = n$$

Folgerung :

Für einen Vektorraum V der Dimension n bilden n linear unabhängige Vektoren stets eine Basis von V .

Beispiele :

- a) Der Vektorraum der Pfeilklassen einer Geraden bzw. einer Ebene bzw. des Raumes ist ein-
zwei- oder dreidimensional.
- b) Der Vektorraum der n -Tupel ist n -dimensional.

Begründung :

Die Menge $\left\{ (1|0| \dots |0), (0|1| \dots |0), \dots, (0|0| \dots |1) \right\}$ ist, wie man sofort einsieht, eine Basis (sog. Standardbasis).
