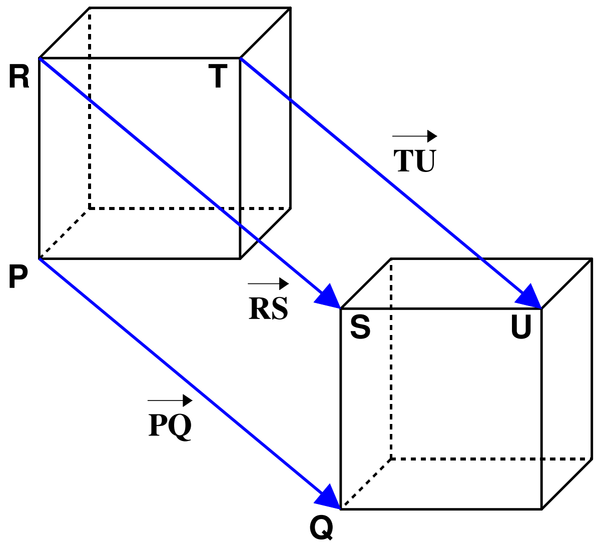
I. Vektorräume

1. Geometrische Definition von Vektoren

Verschiebungen im Raum veranschaulicht man durch Pfeile, die von den Punkten zu den jeweiligen Bildpunkten gerichtet sind.



Definition :

Eine **Klasse parallelgleicher Pfeile** der Ebene oder des Raumes heißt **Vektor** $\vec{v}$.
Jeder einzelne Pfeil aus der Klasse heißt **Repräsentant** des Vektors.

Beispiel :

$\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ sind Repräsentanten des gleichen Vektors $\vec{v}$.

Man schreibt kurz, aber leider nicht ganz richtig : $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{PQ}}$

Bemerkungen :

1. Ein Pfeil ist ein geordnetes Punktepaar $\overrightarrow{PQ} = \left(P \mid Q\right)$.

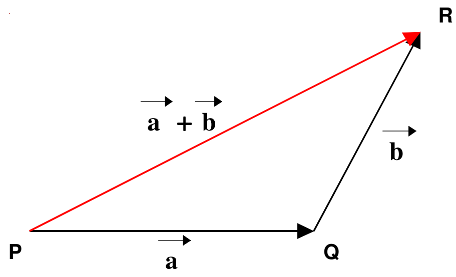
2. Eine Aufteilung einer Menge in ein System **disjunkter**, d. h. durchschnittsfremder Teilmenen,heißt **Klasseneinteilung**. Eine dieser Teilmengen heißt dann **Klasse**.

1.2 Vektoraddition

Die Addition zweier Vektoren erfolgt nach der Vorschrift

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}}$$

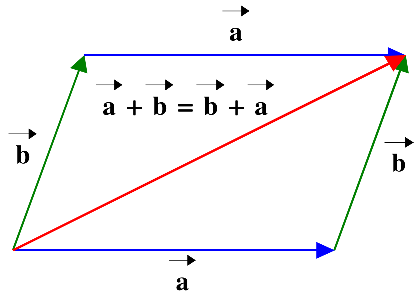
und ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.



Gesetze der Vektoraddition :

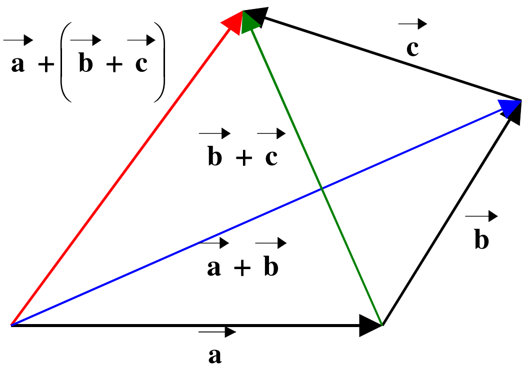
K Kommutativgesetz

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$$



A Assoziativgesetz

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$



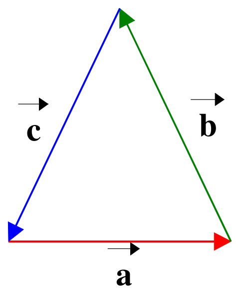
$$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}$$

N Neutrales Element - der Nullvektor

Der Vektor $\vec{o} = \overrightarrow{PP}$ ist ein Vektor, dessen Repräsentanten den Betrag (Länge) Null haben und keine Richtung besitzen. Es gilt

$$\boxed{\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}}$$

Eine geschlossene Vektorkette hat als Summenvektor den Nullvektor.

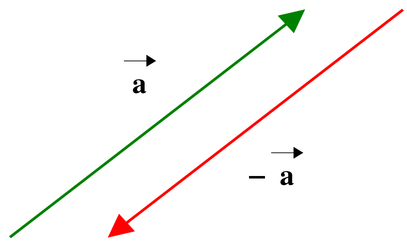


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$$

I Inverses Element

Der Vektor, dessen Repräsentanten die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung wie die des Vektors $\vec{a}$ besitzen, heißt dessen **Gegenvektor** $-\vec{a}$. Also

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} \Leftrightarrow -\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathbf{QP}}}$$

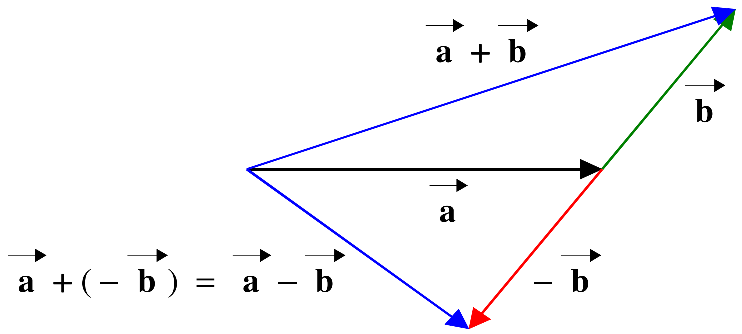


Es gilt :

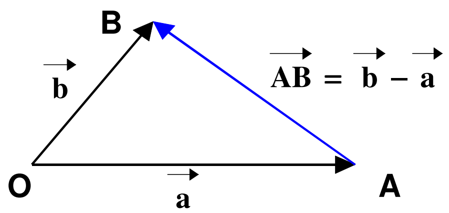
$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{PQ}} + \overrightarrow{\mathbf{QP}} = \overrightarrow{\mathbf{PP}} = \vec{\mathbf{o}}}$$

1.3 Die Vektorsubtraktion

> **Definition** :
>
> Man subtrahiert den Vektor $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$, indem man den Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.



Anwendung :



Wird ein Dreieck OAB von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt, dann gilt $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Beweis :

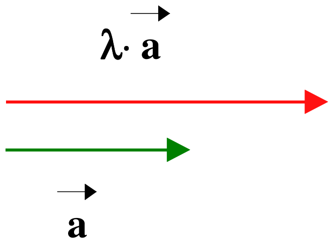
$$\vec{a} + \overrightarrow{AB} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

1.4 Die Skalarmultiplikation von Vektoren

Unter dem λ-Fachen ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) eines Vektors $\vec{a}$ i. Z.

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$$

versteht man den Vektor, dessen Repräsentanten die λ-fache Länge und die gleiche Richtung wie die Repräsentanten von $\vec{a}$ haben.



Speziell gilt dann :

$$\boxed{\mathbf{1} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}}$$

Weiter definiert man :

$$\boxed{\mathbf{0} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}}$$

$$\boxed{(-\lambda) \cdot \vec{\mathbf{a}} = -(\lambda \cdot \vec{\mathbf{a}})}$$

Da man richtungslose Größen auch Skalare nennt, bezeichnet man die so definierte Multiplikation mit reellen Zahlen als **S(kalar)-Multiplikation**.

Gesetze der S-Multiplikation

A Distributivgesetz für Vektoren

$$\boxed{\lambda \cdot (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \lambda \cdot \vec{\mathbf{a}} + \lambda \cdot \vec{\mathbf{b}}}$$

B Distributivgesetz für Skalare

$$\boxed{(\lambda + \mu) \cdot \vec{\mathbf{a}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{a}} + \mu \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

C Assoziativgesetz

$$\boxed{(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{\mathbf{a}} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{\mathbf{a}})}$$

Die Menge aller Vektoren der Ebene oder des Raumes bildet zusammen mit der **Vektoraddition** und der **Skalarmultiplikation** einen sog. **geometrischen Vektorraum**.

1.5 Der abstrakte Vektorraum

Definition :

Eine Menge V, deren Elemente man Vektoren nennt, heißt **Vektorraum** über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wenn gilt

1. In V ist eine Verknüpfung (**Addition**) mit Nullelement und inversem Element definiert und für diese Addition gilt das Kommutativ- und Assoziativgesetz.

2. Auf V ist eine Verknüpfung mit reellen Zahlen (**Skalarmultiplikation**) definiert, bzgl. der gilt

(1) $\boxed{\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}}$ (2) $\boxed{(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}}$

(3) $\boxed{(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})}$ (4) $\boxed{1 \cdot \vec{a} = \vec{a}}$

Beispiel : Der **Vektorraum der n-Tupel**

Die Menge der n-Tupel reeller Zahlen $T_n = \left\{ (a_1 | a_2 | \ \ldots \ | a_n) \ \middle| \ a_i \in \mathbb{R} \, , 1 \le i \le n \right\}$

bildet mit der **Addition**

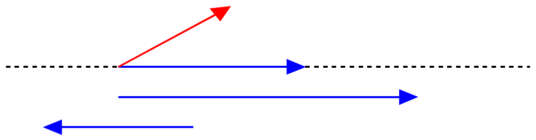
$(a_1 | a_2 | \ \ldots \ | a_n) + (b_1 | b_2 | \ \ldots \ | b_n) := (a_1 + b_1 | a_2 + b_2 | \ \ldots \ | a_n + b_n)$

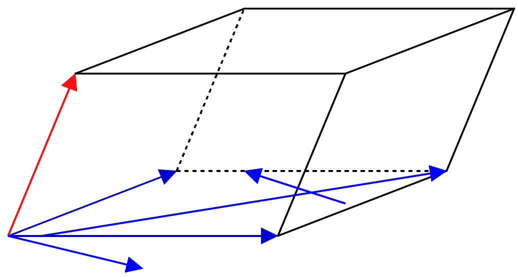
und der **Skalarmultiplikation**

$k \cdot (a_1 | a_2 | \ \ldots \ | a_n) := (k \cdot a_1 | k \cdot a_2 \ | \ \ldots \ | k \cdot a_n) \ , \ k \in \mathbb{R}$

einen reellen Vektorraum.

1.6 Untervektorräume





Definition :

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V heißt ein **Untervektorraum** von V, wenn U mit der in V definierten Addition und der auf V erklärten Skalarmultiplikation selbst ein Vektorraum ist.

Beispiele :

a) Die Pfeilklassen, deren Repräsentanten zu ein und derselben Geraden parallel sind, bilden einen Untervektorraum des Vektorraums der Pfeilklassen der Ebene.

a) Die Pfeilklassen, deren Repräsentanten zu ein und derselben Ebene parallel sind, bilden einen Untervektorraum des Vektorraums der Pfeilklassen des Raumes.

b) Alle n-Tupel, deren 1. Tupelstelle gleich Null ist, bilden einen Untervektorraum des Vektorraumes der n-Tupel.

Bemerkung :

Der Nachweis, dass eine nichtleere Teilmenge U einesVektorraums V ein Untervektorraum ist, ist bereits erbracht, wenn man zeigt, dass

U1 die Summe zweier Vektoren aus U wieder in U liegt.

U2 für jeden Vektor aus U auch sein Gegenvektor in U liegt.

Begründung :

Da U nicht gleich der leeren Menge ist,gibt es ein $\vec{u} \in U$:

Wegen U2 ist dann auch $-\vec{u} \in U$.

Wegen U1 ist dann auch $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o} \in U$.

Alle anderen Anforderungen an einen Vektorraum (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz für die Addition, Assoziativgesetz und Distributivgesetze für die Skalarmultiplikation) erfüllt U als Teilmenge von V trivialerweise.