Abitur 2009	Aufgabe VI	Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2 \mid 0 \mid 1)$, $B(2 \mid -2 \mid 0{,}5)$ und $C(0 \mid -4 \mid 1)$ sowie die Ebene $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ gegeben.

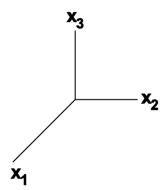
1. a) A, B und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform sowie in Normalenform.

[mögliches Teilergebnis $E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$]

b) Bestätigen Sie, dass die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade der Ebenen E und F ist, und begründen Sie, dass s in der x_1x_3-Koordinatenebene liegt.

c) Zeigen Sie, dass die Punkte $R(4 \mid 0 \mid 0)$ und $S(0 \mid 0 \mid 2)$ auf der Geraden s liegen und dass die $T(0 \mid -8 \mid 0)$ bzw. $U(0 \mid 4 \mid 0)$ die Schnittpunkte der Ebene E beziehungsweise der Ebene F mit der x_2-Achse sind.

d) Zeichnen Sie die Punkte R, S, T und U sowie dieGerade s in ein Koordinate system (vgl. Skizze) ein veranschaulichen Sie die Lage der Ebenen E und F.durch Einzeichnen ihrer Spurgeraden.



---

2. In einem Geländemodell liegen dieHänge eines Bergrückens in den Ebenen E und F. Der Grat dieses Bergrückens wird von einem Teil der Geraden s gebildet. Die x_1-Achse zeigt in Südrichtung, die x_2-Achse inOstrichtung.

Vom Punkt B aus wird horizo al ein Tunnel in Ostrichtung durch den Berg bis zur Ebene F gebohrt.

a) Berechnen Sie die Länge des Tunnels im Geländemodell.

b) Vom Punkt $P(2 \mid p_2 \mid p_3)$ der Geraden TR soll in i der Ebene E eine geradlinige Zufahrts-straße zum Tunneleingang B gelegt werden.

Berechnen Sie die Koordinaten von P und begründe, Sie, dass diese Zufahrt zum Tunnel-eingang B bergauf und genau von esten nach Osten verläuft.

c) Berechnen Sie für diese Zufahrtsstraße von P nach B den Neigungswinkel α gegen die Horizontale.

Beschreiben Sie mit kurzer Begründung, in welchem Punkt L der Strecke [TR] die steilstmöglich geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B beginnen würde.

Lösungen

==

1\. a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor : $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenform : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

b)
$$\begin{array}{r|l} (1) & x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \\ (2) & 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (1)+(2) & 3x_1 + 6x_3 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_3 - 4 = 0 \end{array}$$

Parametrisierung : $x_3 = \alpha \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - 2\alpha$

Eingesetzt in (1) : $4 - 2\alpha + x_2 + 2\alpha - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0$

Die Schnittgerade s ist also gegeben durch $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $x_2 = 0$ für alle Punkte von s, liegt s in der x_1x_3-Koordinatenebene.

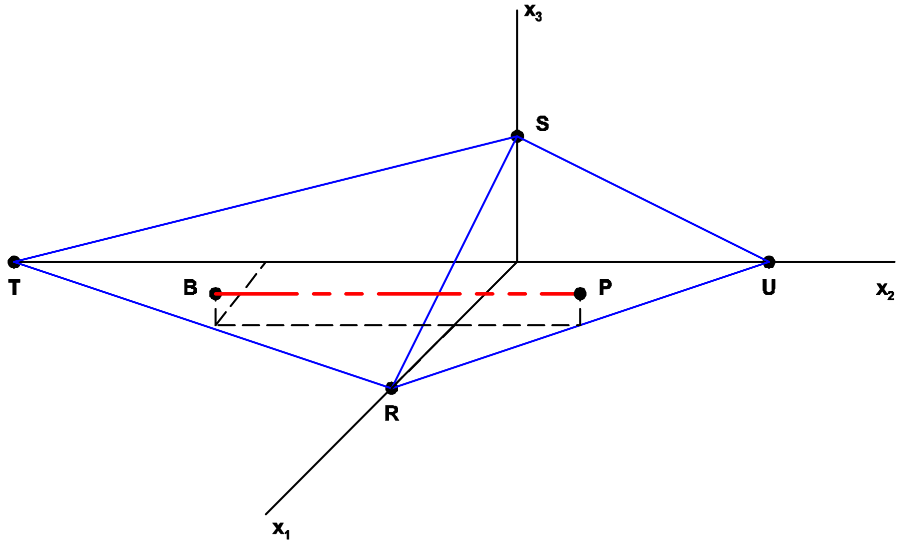
c) Als Aufpunkt von s liegt $R(4 \mid 0 \mid 0)$ auf s und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zeigt, dasss

$S(0 \mid 0 \mid 2)$ auf s liegt.

$x_1 = x_3 = 0$ in E bzw. F eingesetzt ergibt $x_2 = -8$ bzw. $x_2 = 4$.

Also sind $T(0 \mid -8 \mid 0)$ bzw. $U(0 \mid 4 \mid 0)$ die Schnittpunkte von E bzw. F mit der x_2-Achse.

d)



---

2. a) "Geradengleichung" des Tunnels : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der Ebene F : $2 + (-2+\beta) + 2 \cdot 0{,}5 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 3$

Eingesetzt ergibt das $P(2 \mid 1 \mid 0{,}5)$ als Ausgang des Tunnels.

Die Länge des Tunnels ist demnach 3.

b) Gerade TR : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P(2 \mid p_2 \mid p_3)$ eingesetzt ergibt $\gamma = -2$ und damit $p_2 = -4$ und $p_3 = 0$.

Es ist $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Wegen $v_1 = 0$ sowie $v_2, v_3 > 0$ läuft die Auffahrtstraße von Westen nach Osten und immer bergauf.

Steigungsdreieck : $\sin\alpha = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{4{,}25}}$ $\alpha \approx 14°$

Der Punkt L ist der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade TR.

Begründung : In diesem Fall ist die Hypotenuse des Steigungsdreiecks am kleinsten.